加权移位算子的乘积*

丁宣浩 石刚
（四川达县师专数学系，635000） （广西右江师专）

摘 要 P. R. Halmos在文[1]中问：哪样的算子可以表示成加权移位的乘积？在这篇文章中我们证明了可分Hilbert空间上的每一个有界线性算子都是有限个加权移位算子的乘积.

关键词 算子，等距，加权移位.
分类号 AMS(1991) 47A10/CCL O177.6

设 H 为可分复Hilbert空间，$B(H)$ 为 H 上有界线性算子全体. 对于 $T\in B(H)$，若 $\{e_n\}_0^\infty$ 是 H 的标准正交基，$Te_n=w_ne_{n+1}$，$n\geqslant 0$，则称 T 为向前的加权移位，其伴随 T^* 适合 $T^*e_0=0$，$T^*e_n=w_{n-1}e_{n-1}$，$n\geqslant 1$，称 T^* 为向后的加权移位. 如果 $\{e_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 H 的标准正交基，$Te_n=w_ne_{n+1}$，$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，则称 T 是向右的双侧加位移位. 若 $Te_n=w_{n-1}e_{n-1}$，$n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，则称 T 为向左的双侧加权移位. 这四种加权移位在本文中统称为加权移位，但加权移位的重数不加限定. 1972年，美国数学家P. R. Halmas在文[1]中讨论了简单移位算子的乘积问题. 在这篇文章末尾，他提出了一个很有趣的问题："哪样的算子可以表示成加权移位的乘积？"下面我们就对这个问题进行讨论.

定理1 H 上的每一个对角算子是两个加权移位的乘积.

证明 设 $\{e_n\}_0^\infty$ 是 H 的标准正交基，$T\in B(H)$ 使得 $Te_n=a_ne_n$，$n=0,1,2,\cdots$，$\{a_n\}_0^\infty$ 是有界复数列，T 是对角算子. 令

$$e_n=\begin{cases}\xi_m, & n=2m, m=0,1,2,\cdots,\\ \xi_{-m}, & n=2m-1, m=1,2,3,\cdots,\end{cases}$$

则 $\{\xi_n\}_{-\infty}^{\infty}$ 是 H 的标准正交基. 又令

$$a_n=\begin{cases}\beta_m, & n=2m, m=0,1,2,\cdots,\\ \beta_{-m}, & n=2m-1, m=1,2,3,\cdots,\end{cases}$$

则 $T\xi_m=\beta_m\xi_m$，$m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$

令 $A\in B(H)$，使得 $A\xi_m=\beta_m\xi_{m+1}$，$m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，$B\in B(H)$，使 $B\xi_m=\xi_{m-1}$，$m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$，则 A 与 B 都是加权移位，且 $BA\xi_m=B\beta_m\xi_{m+1}=\beta_m\xi_m$，所以 $T=BA$，即 T 是两个加权移位的乘积.

定理2 H 上的每一个等距是至多三个加权移位的乘积.

* 1992年9月21日收到. 四川省教委青年教师科研基金资助.

证明 由 Halmos 文[1]的定理 1 知，可分 Hilbert 空间上的等距算子要么是酉算子，要么是单侧移位，要么是一个酉算子与一个移位的乘积. 再由 Halmos 文[2]的问题 112 的解知，每一个酉算子是两个加权移位的乘积，从而命题得证.

推论 1 H 上的每一个共轭等距是至多三个加权移位的乘积.

证明 因为若 T 是共轭等距，则 T^* 是等距，问题已明了.

定理 3 H 上的每个正算子是至多 10 个加权移位的乘积.

证明 由文[3]的定理 4 知，每个正算子为至多 5 个正对角算子的乘积，结合定理 1 便知定理 3 的结论为真.

定理 4 H 上的每一个有界线性算子是至多 13 个加权移位的乘积.

证明 根据 Halmos 文[2]中的问题 106 知，每一个有界线性算子都是一个极大部分等距变换与一个正算子的乘积，而极大部分等距变换就是等距或共轭等距，根据定理 2 及定理 3 便知定理 4 的结论为真.

参 考 文 献

[1] P. R. Halmos, *Products of shifts*, Duke. Math. Journal., Vol. 39, No. 4, 779—787, 1972.

[2] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, 1967.

[3] 吴培元、候晋川等，对角算子的乘积，科学通报，8，673—675，1992.