第15卷第3期　　数学研究与评论　　Vol. 15 No. 3
1995年8月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Aug. 1995

三角形蛇图的调和性*

徐士达
(江西省上饶师专数学系,334001)

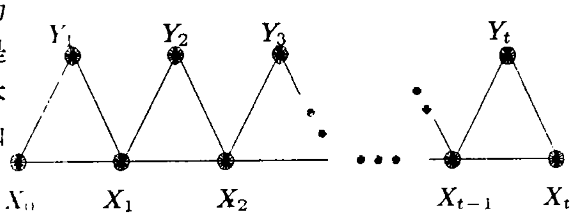
摘　要　称有 e 条边的简单图 G 为调和图,若存在单射 $h:V(G)\to Z_e$, Z_e 是模 e 的整数群,其导出映射 $h^*:E(G)\to Z_e$; $h^*(uv)\equiv h(u)+h(v) \pmod e$, $u,v\in V(G)$ 是一个双射,称 h 为 G 的一个调和标号. 三角形蛇图是一个其所有块都是三角形且其块—割点图为一条路的连通图. 本文证明了具有 t 个块的三角形蛇图是调和的,当且仅当 $t\not\equiv 2 \pmod 4$.

关键词　三角形蛇图,调和标号.

分类号　AMS(1991) 05C/CCL O157.5

本文中的术语及记号同[1],设 $|E(G)|=e$. 称简单图 G 为调和图,若存在单射 $h:V(G)\to Z_e$, Z_e 是模 e 的整数群,其导出映射 $h^*:E(G)\to Z_e$: $h^*\equiv h(u)+h(v) \pmod e$, $u,v\in V(G)$,是一个双射. 称 h 为 G 的一个调和标号.

三角形仙人掌(triangular cactus)是一个连通图,其所有块(block)都是三角形 K_3. 特别,三角形蛇图(triangular snake)是其块-割点图为一条路的三角形仙人掌(见图). 三角形蛇图是否是调和图是[1]中列出的一个 open 问题. 本文将证明,具有 t 个块的三角形蛇图是调和的,当且仅当 $t\not\equiv 2 \pmod 4$.



由调和图定义易证明下列的

定理1　设 G 是一个具有 t 个块的三角形仙人掌且 $t\equiv 2 \pmod 4$,则 G 必不是调和图.

下面将给出具有 t 个块的三角形蛇图的调和标号,这里 $t\not\equiv 2 \pmod 4$.

设 $t=4m+1 (m\geqslant 1)$,则 $e=12m+3$,顶点标号 h_1 如下:

$$h_1(X_{2k-1})=3(k-1),\ 1\leqslant k\leqslant 2m+1;\quad h_2(X_0)=12m+1;$$

$$h_1(X_{2k})=3(k+m),\ 1\leqslant k\leqslant 2m;\qquad h_1(Y_1)=6m+2;$$

$$h_1(Y_{2k-1})=\begin{cases}3(2m+k)-1, & 2\leqslant k\leqslant m+1,\\ 3k-4, & m+2\leqslant k\leqslant 2m+1;\end{cases}$$

$$h_1(Y_{2k})=\begin{cases}3(2m+k)-1, & 1\leqslant k\leqslant m,\\ 3k-2, & m+1\leqslant k\leqslant 2m.\end{cases}$$

设 $t=4m+3 (m\geqslant 1)$,则 $e=12m+9$,顶点标号 h_3 如下:

* 1992年9月27日收到. 94年4月6日收到修改稿. 江西省自然科学基金资助项目.

$$h_3(X_{2k-1}) = 3(k-1),\ 1 \leqslant k \leqslant 2m+2; \quad h_3(X_0) = 6m+5;$$

$$h_3(X_{2k}) = 3(2m+k+1),\ 1 \leqslant k \leqslant 2m; \quad h_3(Y_1) = 12m+7;$$

$$h_3(Y_{2k-1}) = \begin{cases} 3(2m+k)+5, & 2 \leqslant k \leqslant m+1, \\ 3m+5, & k = m+2, \\ 3(2m+k)-2, & m+3 \leqslant k \leqslant 2m+2; \end{cases}$$

$$h_3(Y_{2k}) = \begin{cases} 3k+2, & 1 \leqslant k \leqslant m, \\ 9m+4, & k = m+1, \\ 3k-5, & m+2 \leqslant k \leqslant 2m+1. \end{cases}$$

当 $t=3$ 时，令 $h_3(X_0)=5, h_3(X_1)=3, h_3(X_2)=6, h_3(X_3)=1, h_3(Y_1)=8, h_3(Y_2)=0, h_3(Y_3)=4$.

设 $t=8m$，则 $e=24m$，顶点标号 h_0 如下：

$$h_0(X_0) = 12m; \quad h_0(X_{2k-1}) = 3(k-1),\ 1 \leqslant k \leqslant 4m;$$

$$h_0(X_{2k}) = 3(4m+k)-1,\ 1 \leqslant k \leqslant 4m; \quad h_0(Y_1) = 6m-2;$$

$$h_0(Y_{2k-1}) = \begin{cases} 6(4m-k)+7, & 2 \leqslant k \leqslant m+1, \\ 6(2m-k)+7, & m+2 \leqslant k \leqslant 2m+1, \\ 6(3m-k)+4, & 2m+2 \leqslant k \leqslant 3m, \\ 6(5m-k)+4; & 3m+1 \leqslant k \leqslant 4m; \end{cases}$$

$$h_0(Y_{2k}) = \begin{cases} 6(3m-k)+1, & 1 \leqslant k \leqslant 2m, \\ 18m-3, & k = 2m+1, \\ 6(6m-k)+4, & 2m+2 < k < 4m. \end{cases}$$

设 $t=8m+4(m \geqslant 1)$，则 $e=24m+12$，下面是顶点标号法 h_4：

$$h_4(X_0) = 12m+6; \quad h_4(X_{2k}) = 3(4m+k)+5,\ 1 \leqslant k \leqslant 4m+2;$$

$$h_4(X_{2k-1}) = 3(k-1),\ 1 \leqslant k \leqslant 4m+2; \quad h_4(Y_1) = 6m+1;$$

$$h_4(Y_{2k-1}) = \begin{cases} 6(2m-k)+10, & 2 \leqslant k \leqslant 2m+1, \\ 6(5m-k)+19, & 2m+2 \leqslant k \leqslant 4m+2; \end{cases}$$

$$h_0(Y_{2k}) = \begin{cases} 6(3m-k)+10, & 1 \leqslant k \leqslant m+1, \\ 6(5m-k)+19, & m+2 \leqslant k \leqslant 2m+1, \\ 18m+6, & k = 2m+2, \\ 6(6m-k)+22, & 2m+3 \leqslant k \leqslant 3m+2, \\ 6(4m-k)+13, & 3m+3 \leqslant k \leqslant 4m+2. \end{cases}$$

当 $t=4$ 时，令 $h_4(X_0)=7, h_4(X_1)=0, h_4(X_2)=3, h_4(X_3)=6, h_4(X_4)=2, h_4(Y_1)=5, h_4(Y_2)=1, h_4(Y_3)=8, h_4(Y_4)=4$.

综上便有：

定理 2 具有 t 个块的三角形蛇图是一个调和图当且仅当 $t \not\equiv 2 \pmod 4$.

参 考 文 献

[1] J. A. Gallian, *A survey: recent results, conjectures, and open problems in labeling graphs*, Journal of Graph theory, 13(1989), 491—504.

[2] T. Grace, *On sequential labelings of graphs*, Journal of Graph Theory, 7(1983), 195—201.