某些非线性积分不等式*

胡适耕　　黄正海
(华中理工大学数学系,武汉 430074)

摘　要　本文考虑一定有序局部紧空间上的非线性积分不等式,并给出其对于一定非线性积分方程的应用.

关键词　有序局部紧空间,非线性积分不等式,非线性积分方程.
分类号　AMS(1991) 26D15/CCL O172.2

§1　引　言

如所熟知,经典的Bihari积分不等式[1]及其各种推广是微分方程、积分方程与微分积分方程理论中有广泛应用的强有力工具.许多作者致力于建立愈来愈一般的非线性积分不等式,关于这一课题已有可观的文献(如[2－4]),其中不少涉及多变量且或多或少用到微分工具.微分法的采用往往掩盖了一个本质事实:许多这一类的不等式实际上并不依赖于R^n的特殊性质,而只依赖于少数几条有关序的性质,这些性质为更一般的空间所具有.开创性的工作[5]首先为Volterra型积分不等式问题奠定了一种一般观点,这种观点进而为[6,7]所发挥.本文发展[5－7]的方法,在很一般的框架下建立某些非线性积分不等式,并将其用于一定的非线性积分方程.

§2　有序拓扑空间

本文设G是具有正则Borel测度μ的局部紧Hausdorff空间,在G中已给定"序"$<$,它满足如下的公理(A_1)～(A_4)及(A_5)、(A_5')之一:

(A_1)　$r<s<t(r,s,t\in G)\Rightarrow r<t$;

(A_2)　$G_t\overset{\triangle}{=}\{s\in T: s<t\}$恒为紧集;

(A_3)　$\lim\limits_{s\to t}\mu(G_s\triangle G_t)=0$,△记对称差;

(A_4)　存在"最小元"$t_0\in G$,使得$\forall\ t\in G: t_0\leqslant t$($\leqslant$记$<$或$=$),且$\mu G_{t_0}=0$;

(A_5)　若$t_0<t$,$\mathscr{U}$是$G_t\cup\{t\}$的开覆盖,则存在G中的链$t_0<t_1<\cdots<t_n=t(n\geqslant1)$,使得$\forall\ i\in\{1,2,\cdots,n\},\exists\ U\in\mathscr{U}:\{t_{i-1},t_i\}\subset U$;

* 1992年9月2日收到.

(A_5') 若 $t_0 < t$，则存在 G 中的链 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$，使得 $\forall\, i \in \{1,2,\cdots,n\}$，$s < t_i \Rightarrow s \leqslant t_{i-1}$.

几种典型的特殊情况如下：

(Ⅰ) $G = a + R_+^n\ (a \in R^n)$，取 $<$ 为通常的向量序 $\leqslant$.

(Ⅱ) $G = R_+^n$，约定 $t < s \Leftrightarrow t \leqslant \varphi(s)$，$\varphi \in C(R_+^n, R_+^n)$ 是满足 $\varphi(t) \leqslant t$ 的给定函数，$\leqslant$ 是通常的向量序.

(Ⅲ) $G = R^n$；$t < s \Leftrightarrow |t| \leqslant |s|$，$|\cdot|$ 记 Euclid 范数.

(Ⅳ) $G = Q \times R^n$，$Q \subset R^m$ 是一紧集，约定 $(x,y) < (u,v) \Leftrightarrow |y| \leqslant |v|\ (x,u \in Q, y,v \in R^n)$.

(Ⅴ) $G = \mathbf{Z}_+$，取 $<$ 为通常的"小于".

易验证(Ⅰ)～(Ⅳ)依 Lebesgue 测度满足公理 (A_1)～(A_5)，而 $\mathbf{Z}_+$ 依计数测度满足公理 (A_1)～$(A_4)(A_5')$. 注意对情况(Ⅲ)有 $G_t = \overline{B}(0, |t|)\ (t \in R^n)$；对情况(Ⅳ)有 $G_t = Q \times \overline{B}(0, |y|)$ $(t = (x,y) \in Q \times R^n)$.

任给 $x \in L^1_{loc}(G)$，由公理 (A_2)，x 在每个 G_t 上可积，约定 $\int^t x(s)ds = \int_{G_t} x(s)d\mu(s)$. 由

$$\left|\int^t x(s)ds - \int^\tau x(s)ds\right| \leqslant \int_{G_t \triangle G_\tau} |x(s)|ds$$

及公理 (A_3) 推出 $u(t) \stackrel{\triangle}{=} \int^t x(s)ds$ 连续. 若 $x \geqslant 0$ $(\Leftrightarrow x(t) \geqslant 0, \mu\text{-a.e.})$，则公理 (A_1) 推出 $u(t)$ 单调增. 其次由公理 (A_4) 有 $u(t_0) = 0$，t_0 依公理 (A_4).

§3 主要结果

本文的主要目的是考虑积分不等式

$$x(t) \leqslant w(t) + \int^t k(t,s)f(x(s))ds + \int^t\int^s g(t,s,\tau,x(\tau))d\tau ds. \tag{1}$$

首先对其中的函数 x, w, k, f, g 设定于下：

(i) $x, w: G \to R_+$ 局部有界且可测(本文中"可测"一词概对 μ 而言). 约定 $\hat{x}(t) = \sup\limits_{s \leqslant t} x(s)$；$\hat{w}$ 仿此.

(ii) $k: D \stackrel{\triangle}{=} \{(t,s) \in G \times G: s < t\} \to R_+$ 可测. 约定

$$\hat{k}(t,s) = \sup_{s < \tau \leqslant t} k(\tau, s), \quad (t,s) \in D, \tag{2}$$

则 $\hat{k}$ 对 t 单调增. 假定 $\hat{k}(t,\cdot)|G_t \in L^1\ (\forall\, t \in G)$，并令

$$k_1(t) = \int^t \hat{k}(t,s)ds, \quad t \in G. \tag{3}$$

(iii) $f \in C(R_+, R_+)$；约定

$$\hat{f}(\xi) = \sup_{y \leqslant \xi} f(y), \tag{4}$$

则 $\hat{f}: R_+ \to R_+$ 单调增. 令 $\xi_0 = \hat{w}(t_0)$，t_0 依公理 (A_4). 设当 $\xi > \xi_0$ 时 $0 < \hat{f}(\xi) < \infty$，取定 $r_0 > \xi_0$，令

$$F(r) = \int_{r_0}^r \frac{d\xi}{\hat{f}(\xi)}, \quad r \geqslant \xi_0, \tag{5}$$

则 $F(r)$ 对 $r \geqslant \xi_0$ 有定义、连续且严格增加，从而反函数 F^{-1} 存在，且

$$\mathrm{Dom}(F^{-1}) = [F(\xi_0), F(\infty)].$$

(iv) $E=\{(t,s,\tau)\in G\times G\times G: \tau<s<t\}$, $g(t,s,\tau,y): E\times R_+\to R_+$对$(t,s,\tau)$可测，对$y$连续. 约定

$$\hat{g}(t,s,\tau,\xi) = \sup_{s<\sigma\leqslant t,\, y\leqslant \xi} g(\sigma,s,\tau,y); \tag{6}$$

$$h(t,s,\xi) = \int^{s} \hat{g}(t,s,\tau,\xi)d\tau; \tag{7}$$

$$\hat{h}(t,\xi) = \sup_{s<t} h(t,s,\xi), \tag{8}$$

显然$\hat{g}, h, \hat{h}$分别对t,ξ单调增.

以下是本文的主要定理.

定理 1 设x满足不等式(1)，x,w,k,f,g依(i)～(iv). 若$t\in G$使得以下条件满足：

$$F(\xi) + k_1(t) \leqslant \int_{r_0}^{\infty} \frac{d\xi}{f(\xi)} \quad (\forall\, \xi \geqslant \xi_0); \tag{9}$$

$$0 < \hat{h}(t, F^{-1}(F(\xi) + k_1(t))) < \infty \quad (\forall\, \xi > \xi_0); \tag{10}$$

$$H_t(\hat{w}(t)) + \mu G_t \leqslant H_t(\infty), \tag{11}$$

其中

$$H_t(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{\hat{h}(t, F^{-1}(F(\xi) + k_1(t)))}, \quad r \geqslant \xi_0, \tag{12}$$

$k_1, F, \hat{h}$分别依(3)，(5)，(8)，则成立

$$x(t) \leqslant F^{-1}(F \circ H_t^{-1}(H_t(\hat{w}(t)) + \mu G_t) + k_1(t)). \tag{13}$$

证明 1° 任给$t\in G$，$s\leqslant t$，由(1)并用(4)，(6)，(7)有

$$\begin{aligned} x(s) &\leqslant w(s) + \int^{s} k(s,\tau) f(x(\tau))d\tau + \int^{s}\int^{\tau} g(s,\tau,\theta,x(\theta))d\theta d\tau \\ &\leqslant \hat{w}(t) + \int^{t} \hat{k}(t,\tau)\hat{f}(\hat{x}(\tau))d\tau + \int^{t}\int^{\tau} \hat{g}(t,\tau,\theta,\hat{x}(\tau))d\theta d\tau \\ &= \hat{w}(t) + \int^{t} \hat{k}(t,\tau)\hat{f}(\hat{x}(\tau))d\tau + \int^{t} h(t,\tau,\hat{x}(\tau))d\tau, \end{aligned}$$

这推出$\hat{x}$满足积分不等式

$$\hat{x}(t) \leqslant u(t) + \int^{t} \hat{k}(t,s)\hat{f}(\hat{x}(s))ds, \tag{14}$$

其中

$$u(t) = \hat{w}(t) + \int^{t} h(t,s,\hat{x}(s))ds. \tag{15}$$

由(15)看出$u(t)$非负且单调增，$u(t_0)=\hat{w}(t_0)=\xi_0$.

2° 取定满足(9)～(11)的$t>t_0$，任给$\eta>0$，令

$$v(s) = v_\eta(s) = \eta + u(t) + \int^{s} \hat{k}(t,\tau)\hat{f}(\hat{x}(\tau))d\tau. \tag{16}$$

由对$\hat{k}, \hat{f}$的假定知(16)式中的积分存在，因此$v(s)$有定义，它显然连续且单调增. 令$v_0=v(t_0)$，则$v(s)\geqslant v_0=\eta+u(t)>u(t_0)=\xi_0$. 其次，对任给$s\leqslant t$，对比(14)，(16)看出$\hat{x}(s)\leqslant v(s)$，特别$\hat{x}(t)\leqslant v(t)$.

首先设公理(A_5)满足. 任给 $\varepsilon>0$,取 $\delta>0$,使当 $v_0\leqslant v_1\leqslant\cdots\leqslant v_n=v(t)$, $\Delta v_i=v_i-v_{i-1}<\delta$($1\leqslant i\leqslant n$)时,有(注意 $v_0>\xi_0$!)

$$\int_{v_0}^{v_n}\frac{d\xi}{\hat f(\xi)}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta v_i}{\hat f(v_i)}+\varepsilon. \tag{17}$$

由 $v(s)$ 连续与 G_t 紧,有 $G_t\cup\{t\}$ 的开覆盖 $\mathscr{U}$,使对任给 $U\in\mathscr{U}$, $s,\tau\in U$ 有 $|v(s)-v(\tau)|<\delta$. 取如公理(A_5)的链 $t_0<t_1<\cdots<t_n=t$,令 $v_i=v(t_i)$,则必 $\Delta v_i<\delta$($1\leqslant i\leqslant n$). 令 $S_i=G_{t_i}\backslash G_{t_{i-1}}$,由(16)与 $\hat x\leqslant v$ 有

$$\Delta v_i=\int_{S_i}\hat k(t,s)\hat f(\hat x(s))ds\leqslant\int_{S_i}\hat k(t,s)\hat f(v(s))ds\leqslant\hat f(v_i)\int_{S_i}\hat k(t,s)ds.$$

于是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta v_i}{\hat f(v_i)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\hat k(t,s)ds=\int^t\hat k(t,s)ds$. 以此代入(17)并令 $\varepsilon\to0$ 得

$$\int_{v_0}^{v_n}\frac{d\xi}{\hat f(\xi)}\leqslant\int^t\hat k(t,s)ds=k_1(t). \tag{18}$$

若公理(A_5')满足,取$\{t_i\}$如公理(A_5'),记号 v_i, S_i 仍如前段,则从 $S_i\subset G_{t_{i-1}}\cup\{t_{i-1}\}$ 推出

$$\Delta v_i\leqslant\int_{S_i}\hat k(t,s)\hat f(v(s))ds\leqslant\hat f(v_{i-1})\int_{S_i}\hat k(t,s)ds,$$

从而

$$\int_{v_0}^{v_n}\frac{d\xi}{\hat f(\xi)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta v_i}{\hat f(v_{i-1})}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_{S_i}\hat k(t,s)ds,$$

这就同样得出(18). (18)可写成

$$F(v(t))\leqslant F(\eta+u(t))+k_1(t).$$

若 $\hat x(t)\geqslant\xi_0$,则 $F(\hat x(t))\leqslant F(\eta+u(t))+k_1(t)$,令 $\eta\to0$ 得

$$F(\hat x(t))\leqslant F(u(t))+k_1(t). \tag{19}$$

条件(9)推出 $F(u(t))+k_1(t)\in\mathrm{Dom}(F^{-1})$,于是从(19)得

$$\hat x(t)\leqslant F^{-1}(F(u(t))+k_1(t)). \tag{20}$$

当 $\hat x(t)<\xi_0$ 或 $t=t_0$ 时(20)式显然亦真. 又因以 $s\leqslant t_0$ 代 t 时(9)成立,故以 $s\leqslant t$ 代 t 时(20)成立.

3° 令 $\varphi(t,\xi)=F^{-1}(F(\xi)+k_1(t))$,则 $\varphi:G\times[\xi_0,\infty)\to[\xi_0,\infty)$ 有定义且分别对 t,ξ 单调增,(20)意味着 $\hat x(t)\leqslant\varphi(t,u(t))$,以此代入(15)得

$$u(t)\leqslant\hat w(t)+\int^t h(t,s,\varphi(s,u(s)))ds\leqslant\hat w(t)+\int^t\psi(t,u(s))ds, \tag{21}$$

其中

$$\psi(t,\xi)=\hat h(t,\varphi(t,\xi))=\hat h(t,F^{-1}(F(\xi)+k_1(t))). \tag{22}$$

条件(10)表明 $0<\psi(t,\xi)<\infty$($\forall\ \xi>\xi_0$),于是依(12), $H_t(r)=\int_{r_0}^{r}d\xi/\psi(t,\xi)$ 对 $r\geqslant\xi_0$ 有定义、连续且严格增加, $\mathrm{Dom}(H_t^{-1})=[H_t(\xi_0),H_t(\infty)]$. 条件(11)表明 $H_t(\hat w(t))+\mu G_t\in\mathrm{Dom}(H_t^{-1})$. 分别以 u, $\hat w$, 1, ψ 代不等式(14)中的 $\hat x$, u, $\hat k$, $\hat f$,将第 2°段的论证略加修改后用于不等式(21),得出

$$u(t)\leqslant H_t^{-1}(H_t(\hat w(t))+\mu G_t).$$

以此代入(20),即得不等式(13). 证毕.

定理 1 有较大的一般性,其推论颇多,择其主要者简述于下(相应条件据定理 1 自明):

1° 若 $w(t)\equiv\xi_0=0$, $\int_0^1\frac{d\xi}{\hat{f}(\xi)}=\int_0^1\frac{d\xi}{\hat{h}(t,F^{-1}(F(\xi)+k_1(t)))}=\infty$, 则 $F(0)=H_t=-\infty$, 于是(13)蕴含 $x(t)\equiv 0$.

2° 取 $f(\xi)\equiv\xi$, 则 $\hat{f}(\xi)\equiv\xi$, 可取 $r_0=1$, 于是 $F(r)=\ln r$, (13)成为

$$x(t)\leqslant H_t^{-1}(H_t(\hat{w}(t))+\mu(G_t)\exp(\int^t\hat{k}(t,s)ds), \tag{23}$$

其中 $H_t(r)=\int_{r_0}^r d\xi/\hat{h}(t,\xi\exp k_1(t))$.

3° 取 $f(\xi)\equiv\xi$, $g(t,s,\tau,y)=l(t,s,\tau)y$, $l:E\to R_+$ 可测, 则 $\hat{h}(t,\xi)=l_1(t)\xi$, 其中

$$l_1(t)=\sup_{s<t}\int^s\sup_{s<\sigma\leqslant t}l(\sigma,s,\tau)d\tau. \tag{24}$$

于是 $H_t(r)=\ln r/l_1(t)\exp k_1(t)$, 而(23)化成

$$x(t)\leqslant\hat{w}(t)\exp[k_1(t)+\mu G_t l_1(t)\exp k_1(t)]. \tag{25}$$

4° 取 $g\equiv 0$, 则依(15)有 $u=\hat{w}$; 再由(20)得

$$x(t)\leqslant F^{-1}(F(\hat{w}(t))+k_1(t)). \tag{26}$$

若进而设 $f(\xi)\equiv\xi$, 从而 $F(r)=\ln r$, 则(26)成为

$$x(t)\leqslant\hat{w}(t)\exp(\int^t\hat{k}(t,s)ds). \tag{27}$$

这是一个抽象的 Gronwall 不等式结果,在[6]中(定理 4)它由完全不同的途径得到. 注意,形式地在(25)中令 $l_1(t)\equiv 0$ 亦得出(27).

5° 取 $G=a+R_+^n$, $a=(a_i)\in R^n$, $k(t,s)\equiv 1$, 则从(26)得

$$x(t)\leqslant F^{-1}(F(\hat{w}(t))+\prod_{i=1}^n(t_i-a_i)), \tag{28}$$

其中 $t=(t_i)\in G$. 若进而设 $n=1$, $w(t)\equiv\xi_0$, 则从(28)得到经典的 Bihari 不等式[1].

定理 2 设 x 满足积分不等式

$$x(t)\leqslant w(t)+\int^t k(t,s)f(x(s))ds+\int^t\int^s l(t,s,\tau)g(x(\tau))d\tau ds, \tag{29}$$

其中 x, w, k 如定理 1,但设 $w>0$; $l:E\to R_+$ 可测; $f,g:R_+\to R_+$ 单调增, $\xi>0$ 时 $f(\xi)g(\xi)>0$; 存在 $\varphi,\psi\in C(R_+,R_+)$, 使得 $f(a\xi)\leqslant\varphi(a)f(\xi)$, $g(a\xi)\leqslant\psi(a)g(\xi)$ $(a>0,\xi\geqslant 0)$, 当 $\xi\geqslant 1$ 时 $\varphi(\xi)\leqslant c\xi$, c 为正常数, 则

$$x(t)\leqslant w(t)q(t)G^{-1}(\int^t\hat{l}_1(t,s)\psi(q(s))ds), \tag{30}$$

其中

$$q(t)=F^{-1}(c\int^t\hat{k}_1(t,s)ds); \tag{31}$$

$$F(r)=\int_1^r\frac{d\xi}{f(\xi)},\quad G(r)=\int_1^r\frac{d\xi}{g(\xi)}; \tag{32}$$

$$\hat{k}_1(t,s)=\sup_{s<\tau\leqslant t}k_1(\tau,s),\quad k_1(t,s)=\frac{k(t,s)\varphi(w(s))}{w(t)}; \tag{33}$$

$$\hat{l}_1(t,s)=\int_s^t l_1(t,s,\tau)d\tau,\quad l_1(t,s,\tau)=\sup_{\tau\le\sigma\le t}\frac{l(\sigma,s,\tau)\psi(w(\tau))}{w(\sigma)};\tag{34}$$

$t\in G$ 使得以下条件满足：

$$c\int^t\hat{k}_1(t,s)ds\leqslant\int_1^\infty\frac{d\xi}{f(\xi)};\tag{35}$$

$$\int^t\hat{l}_1(t,s)\psi(q(s))ds\leqslant\int_1^\infty\frac{d\xi}{g(\xi)}.\tag{36}$$

证明 令 $y(t)=x(t)/w(t)$，则从(29)推出

$$y(t)\leqslant 1+\int^t\hat{k}_1(t,s)f(y(s))ds+\int^t\int^s l_1(t,s,\tau)g(y(\tau))d\tau ds\overset{\triangle}{=}z(t),$$

其中 $\hat{k}_1, l_1$ 依(33)，(34). 易见 $z(t)$ 单调增，因此

$$z(t)\leqslant 1+\int^t\hat{k}_1(t,s)f(z(s))ds+\int^t\hat{l}_1(t,s)g(z(s))ds,$$

即

$$z(t)\leqslant u(t)+\int^t\hat{k}_1(t,s)f(z(s))ds,\tag{37}$$

其中

$$u(t)=1+\int^t\hat{l}_1(t,s)g(z(s))ds.\tag{38}$$

注意 $u(t)$ 单调增且 $u\geqslant 1$，于是 $v(t)\overset{\triangle}{=}z(t)/u(t)$ 满足

$$v(t)\leqslant 1+\int^t\frac{\hat{k}_1(t,s)\varphi(u(s))}{u(s)}f(v(s))ds\leqslant 1+c\int^t\hat{k}_1(t,s)f(v(s))ds.\tag{39}$$

利用条件(35)及定理 1 之后的 4°从(39)得出

$$v(t)\leqslant F^{-1}(c\int^t\hat{k}_1(t,s)ds)=q(t)\tag{40}$$

(注意由(32)有 $F(1)=0$)；由此得到

$$x(t)\leqslant w(t)q(t)u(t).\tag{41}$$

取定满足(35)，(36)的 $t\in G$，则易见以 $s\leqslant t$ 代 t 时(40)亦真，于是从(38)得

$$u(t)\leqslant 1+\int^t\hat{l}_1(t,s)g(q(s)u(s))ds\leqslant 1+\int^t\hat{l}_1(t,s)\psi(q(s))g(u(s))ds,$$

如同得出(40)一样有(利用条件(36))

$$u(t)\leqslant G^{-1}(\int^t\hat{l}_1(t,s)\psi(q(s))ds).\tag{42}$$

结合(41)，(42)即得不等式(30)，证毕.

注 1 定理 2 蕴含[8]之定理 5(取 $G=R_+, k(t,s)\equiv k(s), l(t,s,\tau)\equiv l(s)m(\tau)$). 注意[8]中的证明基于微分法，无法移用于本文.

注 2 估计式(30)似较(13)简单些. 但定理 1 对 w, f, g 的要求宽得多，这对于应用是重要的.

§4 应 用

设$(X,|\cdot|)$是一实 Banach 空间，今将上节结果用于研究关于 $x:G\to X$ 的非线性积分方程

$$x(t)=w(t)+\int^t K(t,s)f(x(s))ds+\int^t\int^s g(t,s,\tau,x(\tau))d\tau ds, \tag{43}$$

其中 $w:G\to X$ 可测且局部有界，$K:D\to L(X)$可测，$f\in C(X,X)$，$g(t,s,\tau,y):E\times X\to X$ 对(t,s,τ)可测对 y 连续. 令

$$\hat{f}(\xi)=\sup_{|y|\leqslant\xi}|f(y)|;\quad \hat{g}(t,s,\tau,\xi)=\sup_{|y|\leqslant\xi}|g(t,s,\tau,y)|, \tag{44}$$

则 $\hat{f},\hat{g}$ 都对 $\xi\geqslant 0$ 单调增，(43)的解 x 满足

$$|x(t)|\leqslant|w(t)|+\int^t|K(t,s)|\hat{f}(|x(s)|)ds+\int^t\int^s\hat{g}(t,s,\tau,|x(\tau)|)d\tau ds,$$

这是关于$|x(t)|$的一个形如(1)的不等式，从而可能利用定理 1 来估计$|x(t)|$. 例如，利用估计(25)不难得出以下简单结果：

定理 3 设(i) w 在 G 上有界； (ii) $|K(t,s)|\leqslant k(t,s)$，$\hat{f}(\xi)\leqslant c\xi$，$c$ 是正常数，k 如定理 1，k_1(依(3))有界； (iii) $\hat{g}(t,s,\tau,\xi)\leqslant l(t,s,\tau)\xi$，$l_1(t)>0$，$\mu G_t l_1(t)$有界，$l_1$ 依(24). 则方程(43)在 G 上的局部有界解必有界.

其次，设 f,g 满足条件

$$|f(x)-g(y)|\leqslant\varphi(|x-y|); \tag{45}$$

$$|g(t,s,\tau,x)-g(\tau,s,\tau,y)|\leqslant\psi(t,|x-y|), \tag{46}$$

其中 $\varphi\in C(R_+,R_+)$单调增，$\psi(t,\xi):G\times R_+\to R_+$分别对 t,ξ 单调增，对 ξ 连续. 若 $x,\bar{x}$ 是方程(43)的解，则 $z(t)=|x(t)-\bar{x}(t)|$满足以下积分不等式：

$$z(t)\leqslant\int^t|K(t,s)|\varphi(z(s))ds+\int^t\int^s\psi(t,z(\tau))d\tau ds. \tag{47}$$

注意到定理 1 之后的 1°，不难从定理 1 得到：

定理 4 设(i) 当 $\xi>0$ 时 $\varphi(\xi)>0$，$\int_0^1 d\xi/\varphi(\xi)=\int_1^\infty d\xi/\varphi(\xi)=\infty$； (ii) $k_1(t)=\int^t\sup_{s<\tau\leqslant t}|k(\tau,s)|ds<\infty$； (iii) 当 $\xi>0$ 时 $\psi(t,\xi)>0$，$\int_0^1 d\xi/\psi(t,\Phi^{-1}(\Phi(\xi)+k_1(t)))=\infty$，其中 $\Phi(r)=\int_1^r d\xi/\varphi(\xi)$，则方程(34)在 G 上至多有一个局部有界解.

方程(43)可取多种具体形式：

例 1 取 $G=R_+^n$(依§2 中情况(Ⅰ))，$X=R^1$，$w(t)\equiv\xi_0$，$K(t,s)\equiv k(s)$，$g(t,s,\tau,x)\equiv g(s,\tau,x)$，则(34)相当于微分积分方程的初值问题

$$\begin{cases}Dx(t)=k(t)f(x(t))+\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_n}g(t,s,x(s))ds_1\cdots ds_n,\\ x(0)=\xi_0,\end{cases} \tag{48}$$

其中 $t=(t_1,\cdots,t_n)$，$D=(\partial/\partial t_1)\cdots(\partial/\partial t_n)$.

例 2 取 G 如§2 中情况(Ⅳ)，则方程(34)具有形状：

$$x(t,s)=w(t,s)+\int_Q d\tau\int_{|\sigma|\leqslant|s|}k(t,s,\tau,\sigma)f(x(\tau,\sigma))d\sigma$$
$$+\iint_{Q\times Q}d\tau d\tau'\int_{|\sigma|\leqslant|s|}d\sigma\int_{|\sigma'|\leqslant|\sigma|}g(t,s,\tau,\sigma,\tau',\sigma',x(\tau',\sigma'))d\sigma', \tag{49}$$

其中$(t,s)\in Q\times R^n$.

例 3 取 $G=\mathbf{Z}_+$(即§2 中情况(Ⅳ)),则从(34)得差分方程

$$x(n)=w(n)+\sum_{i=0}^{n-1}k(n,i)f(x(i))+\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}g(n,i,j,x(j)). \tag{50}$$

将定理 3,4 用于方程(48)~(50),可得出一定有界性与唯一性结果.

参 考 文 献

[1] I. Bihari, *A generalization of a lemma of Bellman and its applications to uniqueness problems of differential equations*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 7(1956), 81—94.

[2] C. C. Yeh, *Bellman-Bihari integral inequalities in several independent variables*, J. Math. Anal. Appl., 87(1982), 311—321.

[3] E. H. Yang, *On some new integral inequalities in N independent variables*, J. Math. Anal. Appl., 109(1985), 171—181.

[4] P. R. Beesack, *Systems of multidimensional Volterra integral equations and inequalities*, Nonlinear Anal., 9(1985), 1451—1486.

[5] D. D. Bainov, A. D. Myshkis and A. I. Zahariev, *On an abstract analogy of the Bellman-Gronwall inequality*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., 20(1984), 903—911.

[6] A. Rokov and D. Bainov, *Integral equations and inequalities of Volterra type for functions defined in partially ordered spaces*, J. Math. Anal. Appl., 125(1987), 483—507.

[7] A. Ronkov and D. Bainov, *Nonlinear integral inequalities for functions defined in partially ordered topological spaces*, Nonlinear Anal., 11(1987), 297—304.

[8] F. M. Danna, *Submultiplicative and subadditive functions and integral inequalities of Bellman-Bihari type*, J. Math. Anal. Appl., 120(1986), 631—646.

Some Nonlinear Integral Inequalities

Hu Shigeng Huang Zhenghai

(Dept. of Math., Huazhong Univ. of Sci. and Tech., Wuhan 430074)

Abstract

We device some nonlinear integral inequalities on certain ordered locally compact spaces. Some applications of the results to certain nonlinear integral equations are given.

Keywords ordered locally compact spaces, nonlinear integral inequality, nonlinear integral equation.