第15卷第4期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

关于算子 $-(\nabla - i\vec{a})^2 + V$ 的性质(Ⅰ)*

余开奇 马吉溥
(南京航空航天大学数理力学系，210016) (南京大学数学系，210008)

关键词 自伴算子，本质自扩张，Schrödiuger 算子.
分类号 AMS(1991) 47F05,47B80/CCL O177.1

一 $-(\nabla - i\vec{a})^2 + V$ 的本质自伴扩张

本文考虑形式上的 Schrödinger 算子 $P = -\sum_{j=1}^{N}(\partial_j - ia_j)^2 + V$，这里 V 是电子势，$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_N)$ 是奇异电磁势. 对 V，$\vec{a}$ 我们作如下的一般假设

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_N) \in L^2_{loc}(R^N)^N,\ a_j \text{ 实值},\ 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{1.1}$$

$$V \in L^1_{loc}(R^N),\ \text{实值}. \tag{1.2}$$

$V_- := \max(0, -V)$ 满足

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_{R^N} V_- |\varphi|^2 dx \leqslant \theta \int_{R^N} |\nabla\varphi|^2 dx + C\int_{R^N}|\varphi|^2 dx, \quad \varphi \in H^{1,2}(R^N) \\ \text{常数 } 0 \leqslant \theta < 1, C > 0 \text{ 与 } V \text{ 无关}.\end{array}\right\} \tag{1.3}$$

由于 $C_0^\infty(R^N)$ 在 $H^{1,2}(R^N)$ 中稠，$V_-^{1/2}$ 作为 $L^2(R^N) \to L^2(R^N)$ 的乘积算子是闭的. 故(1.3)式可写成

$$\int_{R^N} V_- |\varphi|^2 dx \leqslant \theta \int_{R^N} |\nabla|\varphi||^2 dx + C\int_{R^N}|\varphi|^2 dx, \quad \varphi \in H^{1,2}(R^N) \tag{1.3$'$}$$

条件(1.3)或(1.3)$'$对 $V_- \in K_N$ 成立(其实此时 θ 可以取为零). 这里

$$K_N = \{V \in L^2_{loc}(R^N):\ \lim_{t \downarrow 0}\omega_{N,t}(V) = 0\}, \tag{1.4}$$

$$\omega_{N,t}(V) = \sup_{x \in R^N}\int_{|x-y|<t}|V(y)| \cdot |x-y|^{2-N} dy, \quad t > 0, N \geqslant 3. \tag{1.5}$$

对 $N=2$，$|x-y|^{2-N}$ 换成 $\log|x-y|^{-1}$；对 $N=1$，K_N 是 $L^1_{loc}(R)$(这些定义见[1]).

现在在 $L^2(R^N)$ 中定义半线性形式 h

$$h(u,v) = \sum_{j=1}^{N}((\partial_j - ia_j)u, (\partial_j - ia_j)v) + \int_{R^N} Vu\bar{v}dx, \tag{1.6}$$

这里 u, v 取自集合

$$D(h) = (u \in L^2(R^N): (\partial_j - ia_j)u \in L^2(R^N),\ 1 \leqslant j \leqslant N, V|u|^2 \in L^1(R^N)\}. \tag{1.7}$$

* 1992年10月31日收到. 94年4月25日收到修改稿.

上式中$(\partial_j - ia_j)u$ 是分布意义下的导数. 对 $V\geqslant 0$,业已知道 h 是对称、半有界、稠密、闭的形式(见[7]). 在本文中首先将 $V\geqslant 0$ 的情况推广到 $V_-\neq 0$ 的情形.

在下面的讨论中, $H^{m,p}(\Omega)$(Ω 是 R^N 中的开集)表示 m 次 p 阶 Sobolev 空间, m 为非负整数, $1\leqslant p<\infty$, $H^{m,p}_{loc}$表示局部 Sobolev 空间. 文中出现的算子核的概念是指:如果 T 是 $L^2(R^N)$ 中的闭算子, S 是 $L^2(R^N)$中的可闭算子,满足 $\overline{S}=T$,则 S 的定义域 $D(S)$称为 T 的算子核;换句话讲, $\{u,Tu\}_{u\in S}$所组成的集依图范数在 T 的图 $G(T)$中稠;而形式核是指:如果 q 是 $L^2(R^N)\times L^2(R^N)$中下有界的二次形式, $q(\psi,\psi)\geqslant -M\|\psi\|^2$, $\psi\in Q(q)$,其中 $Q(q)$是 q 的形式域. 称 q 是闭的,如果 $Q(q)$在下述范数下是完备的: $\|\psi\|_+=\sqrt{q(\psi,\psi)+(M+1)\|\psi\|^2}$;如果 q 闭, $D\subset Q(q)$在 $\|\cdot\|_+$下稠于 $Q(q)$,则称 D 是 q 的形式核.

定义 对应于形式 h 的算子 F 如下:首先定义算子 $H: L^2(R^N)\to L^2(R^N)$, $u\in D(H)\Leftrightarrow$存在 $v\in L^2(R^N)$,使得对任意 $\varphi\in C_0^\infty(R^N)$, $h(u,\varphi)=(v,\varphi)$,此时 Hu 就取为 v. 算子 F 也就是 $L^2(R^N)\to L^2(R^N)$,

$$D(F)=\{u\in D(H):(\partial_j-ia_j)u\in L^2(R^N),|V|^{1/2}u\in L^2(R^N)\},$$
$$Fu=Hu,\quad u\in D(F).$$

本节的主要定理之一是

定理 1.1 $F: L^2(R^N)\to L^2(R^N)$是下有界的自伴算子;取 $\lambda\geqslant 0$,满足 $F_\lambda=F+\lambda\geqslant 0$,则有

$$D(F_\lambda^{1/2})=\{u\in L^2(R^N):|V|^{1/2}u\in L^2(R^N),(\partial_j-ia_j)u\in L^2(R^N),\ j=\overline{1,N}\}.$$

从而可以取到适当大的正整数 k,使得 $C_0^\infty(R^N)$是 F_k 的形式核,即 F 是在 $C_0^\infty(R^N)$上按形式意义本质自伴.

定理 1.1 的证明由下列的事实及引理得出.

引理 1.2[3],[5] 设 $u\in H^{1,1}_{loc}(\Omega)$, Ω 是 R^N 中的开集,则$|u|\in H^{1,1}_{loc}(\Omega)$并且

$$\partial_j|u|=\mathrm{Re}\left(\frac{\overline{u}}{|u|}\partial\psi\right).$$

由上述引理和(1.3)′式得,任意 $\varphi\in C_0^\infty(R^N)$

$$\int_{R^N}V_-|\varphi|^2dx\leqslant\theta\sum_{j=1}^N\int_{R^N}|(\partial_j-ia_j)\varphi|^2dx+C\int_{R^N}|\varphi|^2dx$$

从而可取适当的常数 $k\in(0,\infty)$,使 $F+k$ 满足

$$\begin{aligned}k\|\varphi\|^2+\sum_{j=1}^N\int_{R^N}|(\partial_j-ia_j)\varphi|^2dx+\int_{R^N}|V||\varphi|^2dx&\geqslant((F+k)\varphi,\varphi)\\ &\geqslant\|\varphi\|^2+\frac{1-\theta}{2}\int_{R^N}\Big(\sum_{j=1}^N|(\partial_j-ia_j)\varphi|^2dx+|V||\varphi|^2\Big)dx.\end{aligned}\tag{1.8}$$

可不失一般性用 $F+k$ 代替 F 讨论自伴扩张问题. 由(1.8)式定义范数: $u\in C_0^\infty(R^N)$

$$\|u\|_1=((F+k)u,u)^{1/2},$$

则易知 $\|\cdot\|_1$ 是 $C_0^\infty(R^N)$中的内积范数,将其完备化记所得的 Hilbert 空间为 M,内积记为 $(\cdot,\cdot)_M$ 并记

$$\overline{M}=\{u\in L^2(R^N):(\partial_j-ia_j)u\in L^2(R^N),\ |V|^{1/2}u\in L^2(R^N)\}.$$

则有下面的关系

引理 1.3　$M=\overline{M}$.

证明　$\overline{M}$ 恰是 $-(\nabla-i\vec{a})^2+|V|+k$ 的形式核. 而由[7]的结果 $-(\nabla-i\vec{a})^2+|V|+k$ 是以 $C_0^\infty(R^N)$ 为其形式核,故有 $M=\overline{M}$.

引理 1.4　$F+k$ 是正的自伴算子.

证明　任意 $f\in L^2(R^N)$ 定义线性泛函 $\psi_f:M\to R$,对任意 $u\in M$,$\psi_f(u):=(u,f)$,由于 $|(\psi_f(u))|\leqslant\|u\|_1\cdot\|f\|$,故存在唯一的 $v_f\in M$,使得对 $\forall\ u\in M$,$\psi_f(u)=(u,f)=(u,v_f)_M$,定义映射 $P:L^2(R^N)\to L^2(R^N)$,$Pf=v_f$,$\forall\ f\in L^2(R^N)$. 又因为

$$\|Pf\|^2\leqslant\|v_f\|_1^2=(v_f,f)\leqslant\|Pf\|\cdot\|f\|,$$

从而 P 是正的有界自伴算子,P 是单的,事实上,$f\in L^2(R^N)$,$Pf=0$ 时,由定义,对任意 $u\in M$,$(u,f)=0$,而 $C_0^\infty(R^N)\subset M$ 故 $f\equiv0$. 下证 $F+k$ 是满的并且 $(F+k)^{-1}=P$. 事实上,任取 $f\in L^2(R^N)$,$\varphi\in C_0^\infty(R^N)$,有

$$(\varphi,f)=\int_{R^N}\Big[\sum_{j=1}^{N}(\partial_j-ia_j)\varphi\cdot\overline{(\partial_j-ia_j)Pf}+V\varphi\cdot\overline{Pf}\Big]dx+\int_{R^N}k\varphi\cdot\overline{Pf}dx,$$

所以 $u=Pf$ 是方程 $(-(\nabla-i\vec{a})^2+V+k)u=f$ 的弱解,也即按分布意义 $(F+k)u=f$. 而 $u=Pf\in M$,$(F+k)Pf=f$. 所以有 $Pf\in D((F+k))$,并且 $(F+k)Pf=f$. 从而 $F+k$ 是满的;对 $v\in D(F)\subset M$,$Fv=f$,如能证明 $Pf=v$,则可得出 $F+k$ 是单的. 事实上,任意 $u\in M$,$(u,Pf)_M=(u,f)=(u,(F+k)v)=(u,v)_M$,由引理 1.3,$Pf=v$.

至此,已证明 $F+k$ 是正的自伴算子并且 $F+k$ 在 $L^2(R^N)$ 中以 $C_0^\infty(R^N)$ 为其形式核.

引理 1.5　$D((F+k)^{1/2})=M$.

证明　由[4]p275 得:$D((F+k)^{\frac{1}{2}})$ $(F+k)^{1/2}$)是 $(F+k)^{1/2}$ 的算子核,再由引理 1.3,$D((F+k)^{1/2})=M$.

从上面一系列的引理可得定理 1.1 结论.

本节另一定理是考虑本质自伴扩张的极大性问题. 定义极大自伴扩张算子 $\widetilde{F}$ 如下:

$$D(\widetilde{F})=\{u\in D(H):(\partial_j-ia_j)u\in L^2_{loc}(R^N),\ |v|^{1/2}u\in L^2_{loc}(R^N),\ j=\overline{1,N}\},$$

$$\widetilde{F}u=Hu,\quad u\in D(\widetilde{F}).$$

定理 1.6　$\widetilde{F}=F$.

引理 1.7　假设对某个 $k'>0$,$\forall\ \varphi\in C_0^\infty(R^N)$:

$$\sum_{j=1}^{N}\|(\partial_j-ia_j)\varphi\|^2+\int_{R^N}V|\varphi|^2dx+k\|\varphi\|^2\geqslant k'\|\varphi\|^2,$$

这里 k 是(1.8)式中的常数. 则映射 $u\to(F+k)u$ 是 $D(\widetilde{F})\to L^2(R^N)$ 的单射.

证明　u 是下面方程的弱解:$(-(\nabla-i\vec{a})^2+v+k)u=0$,对任意 $\varepsilon>0$,定义 $u_\varepsilon=\dfrac{u}{1+\varepsilon|u|}$,则对 u_ε,我们可利用引理 1.2 及控制收敛定理得:$u_\varepsilon\in L^2_{loc}(R^N)$,$(\partial_j-ia_j)u_\varepsilon\in L^2_{loc}(R^N)$ 及 $u_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}u$,$(\partial_j-ia_j)u_\varepsilon\xrightarrow{\varepsilon\to0}u$,$(\partial_j-ia_j)u_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}(\partial_j-ia_j)u$ 在 $L^2_{loc}(R^N)$ 中.

对任意实值函数 $\varphi\in C_0^\infty(R^N)$,$u_\varepsilon\varphi^2\in M\cap L^\infty(R^N)$,由引理 1.3 得:

$$\sum_{j=1}^{N}((\partial_j - ia_j)u,(\partial_j - ia_j)(u_\varepsilon\varphi^2)) + \int_{R^N}(V+k)u\overline{u}_\varepsilon\varphi^2 dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_{R^N}\sum_{j=1}^{N}[(\partial_j - ia_j)u_\varepsilon\overline{(\partial_j - ia_j)(u_\varepsilon\varphi^2)} + V|u_\varepsilon|^2\varphi^2]dx + \int_{R^N}k|u_\varepsilon|^2\varphi^2 dx$$

$$= \int_{R^N}k(u_\varepsilon - u)\overline{u}_\varepsilon\varphi^2 dx + \int_{R^N}[(\partial_j - ia_j)(u_\varepsilon - u)\overline{(\partial_j - ia_j)(u_\varepsilon\varphi^2)} - V(u-u_\varepsilon)u_\varepsilon\varphi]dx$$

$$=: I_\varepsilon.$$

易得$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I_m I_\varepsilon = 0, \overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\mathrm{Re}I_\varepsilon \leqslant 0$.

简单计算可得

$$I_\varepsilon = \int_{R^N}[\sum_{j=1}^{N}|(\partial_j - ia_j)(u_\varepsilon\varphi)|^2 - |u_\varepsilon|^2|\nabla u|^2 + V|u_\varepsilon|^2\varphi^2 + k|u_\varepsilon|^2\varphi^2$$
$$+ 2i\mathrm{Im}(\overline{u}_\varepsilon\varphi\partial_j\varphi(\partial_j - ia_j)u_\varepsilon]dx.$$

由$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}I_m I_\varepsilon = 0$及引理中的条件得：

$$\sum_{j=1}^{N}\|(\partial_j - ia_j)(u_\varepsilon\varphi)\|^2 + \int_{R^N}V|u_\varepsilon\varphi|^2 dx + \int_{R^N}k|u_\varepsilon\varphi|^2 dx \geqslant k'\|u_\varepsilon\varphi\|^2,$$

所以有

$$0 \geqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}(\mathrm{Re}I_\varepsilon + \mathrm{Im}I_\varepsilon) \geqslant \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}[k'\|u_\varepsilon\varphi\|^2 - \int_{R^N}|u_\varepsilon|^2|\nabla\varphi|^2 dx]$$
$$= k'\|u\varphi\|^2 - \int_{R^N}|u|^2|\nabla\varphi|^2 dx.$$

取 $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$，此处 $\varphi\in C_0^\infty(R^N)$，当 $|x|\leqslant 1$ 时，$\varphi(x)=1$，$|x|\geqslant 2$ 时，$\varphi(x)=0$，$0\leqslant\varphi\leqslant 1$；用 $\varphi_\varepsilon(x)$代替上述不等式的 φ 并令 $\varepsilon\to\infty$ 有 $k'\|u\|\leqslant 0$，从而 $u\equiv 0$.

定理 1.6 的证明　$(F+k)^{-1}$是 $L^2(R^N)$中的有界线性算子，设

$$u \in D(\widetilde{F}+k), v = u - (F+k)^{-1}((\widetilde{F}+k)u),$$

由于 $D(F+k)\subset D(\widetilde{F}+k) \Rightarrow v\in D(\widetilde{F}+k)$. 又因为$(F+k)v=0$及(1.8)式成立，由引理 1.7 得 $v=0$. 所以 $u\in D(F+k)$且$(F+k)u=(\widetilde{F}+k)u$. 得证.

二　F 关于 $\vec{a}, V$ 的连续性

本节中记 $F(\vec{a},V)$代表第一节中由 $\vec{a},V$ 生成的自伴算子，[7]中对 V 是非负的情形讨论了 $F(\vec{a},V)$关于 $\vec{a},V$ 依强豫解式意义的连续依赖性. 我们将其推广到 $V_-\neq 0$ 的情形. 此节符号同前节.

定义 2.1　$L^p_{\mathrm{unif,loc}} = \{u: \sup\limits_{x\in R^N}\int_{|x-y|<1}|u(y)|^p dy < \infty\}, 1\leqslant p<\infty$，称 $L^p_{\mathrm{unif,loc}}$是 p-局部一致可积空间.

引理 2.2　设 $V\in K_N\cap L^p_{\mathrm{unif,loc}}, N\geqslant 3, q>1$，定义 $V_k(x) := \mathrm{sgn}V(x)\cdot\min\{k,|V(x)|\}$，则

$$\omega_{N,a}(V - V_k) = 0.$$

证明

$$\omega_{N,a}(V-V_k)=\sup_x\int_{|x-y|<a}|V-V_k||x-y|^{2-N}dy$$
$$\leqslant \varepsilon^{2-N}\sup_x\int_{|x-y|<a}|V-V_k|dy+2\sup_x\int_{|x-y|<\varepsilon}|V|\cdot|x-y|^{2-N}dy,$$
对取定的 $0<\varepsilon<a$,现估计 $\int_{|x-y|<a}|V-V_k|dy$. 设 $M_k=\{x\in R^N:|V(x)|\geqslant k\}$,则
$$\int_{|x-y|<a}|V-V_k|dy\leqslant\left(\int_{|x-y|<a}|V(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}}|\{x:|x|<a\}\cap M_k|^{\frac{1}{p}},$$
这里 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $|\cdot|$ 表示 Lebesgue 测度. 而
$$|\{x:|x|<a\}\cap M_k|\leqslant\frac{1}{k^q}\int_{|x-y|<a}|V(y)|^q dy$$
$$\Rightarrow\int_{|x-y|<a}|V-V_k|dy\leqslant\left(\int_{|x-y|<a}|V(y)|^q dy\right)\left(\frac{1}{k}\right)^{q/p},$$
从而引理得证.

注 上述引理当 N 取 1,2 时亦成立.

定理 2.3 $\vec{a}\in L^2_{\rm loc}(R^N)$, $V_-\in L^p_{\rm unif.loc}$, $N\leqslant 3$ 时 $p=2$; $N\geqslant 4$ 时 $p>\frac{N}{2}$. $V_+\in L^1_{\rm loc}(R^N)$. 令 $\vec{a}_k=(a_1^k,a_2^k,\cdots,a_N^k)\in(L^2_{\rm loc})^N$, $k=1,2,\cdots$, $0\leqslant V_+^k\in L^1_{\rm loc}(R^N)$,并且 $\vec{a}\xrightarrow[k\to\infty]{L^2_{\rm loc}}\vec{a}$, $V_+^k\xrightarrow[k\to\infty]{L^2_{\rm loc}}V_+$, $V_-^k=\min\{k,V_-\}$,则 $F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-^k)$ 按强豫解式意义收敛于 $F(\vec{a},V)$.

在证明此定理之前,先证明一引理.

引理 2.4 设 $\vec{a}_k,\vec{a}\in L^2_{\rm loc}(R^N)$, $V,V_k\in L^1_{\rm loc}(R^N)$ $(k=1,2,\cdots)$, V_- 相对 $-\Delta$ 的形式界小于 1, $0\leqslant V_k\xrightarrow[k\to\infty]{L^1_{\rm loc}}V_+$, $\vec{a}_k\xrightarrow[k\to\infty]{L^2_{\rm loc}}\vec{a}$ 则 $F(\vec{a}_k,V_k-V_-)$ 依强豫解式意义收敛到 $F(\vec{a},V)$.

证明 设 $f\in L^\infty(R^N)\cap L^2(R^N)$, $\varphi_k=(F(\vec{a}_k,V_k-V_-)+i+1)^{-1}f$. 由 $F(\vec{a},V_k-V_-)$ 自伴得: $\|\varphi_k\|\leqslant\|f\|$. 因此可取 $\{\varphi_k\}$ 的子序列,不妨设为 $\{\varphi_k\}$,它弱收敛到 $\varphi\in L^2(R^N)$. 又
$$((F(\vec{a}_k,V_k-V_-)\varphi_k,\varphi_k)=\||(\nabla-i\vec{a}_k)\varphi_k|\|^2+\|V_k^{1/2}\varphi_k\|^2-\|V_-^{1/2}\varphi_k\|^2,$$
$$\|f\|=\|F(\vec{a},V_k-V_-)+i+1)\varphi_k\|\geqslant\|F(\vec{a}_k,V_k-V_-)\varphi_k\|-\sqrt{2}\|\varphi_k\|,$$
所以有
$$(1+\sqrt{2})\|f\|^2\geqslant\||(\nabla-i\vec{a}_k)\varphi_k|\|^2+\|V_k^{1/2}\varphi_k\|^2-\|V_-^{1/2}\varphi_k\|^2. \tag{2.1}$$
由引理 1.2 得:
$$\int_{R^N}V_-|\varphi_k|^2dx\leqslant\theta\int_{R^N}|\nabla|\varphi_k||^2dx+C\int_{R^N}|\varphi_k|^2dx$$
$$\leqslant\theta\int_{R^N}\sum_{j=1}^N|(\partial_j-ia_j^k)\varphi_k|^2dx+C\int_{R^N}|\varphi_k|^2dx.$$
代入(2.1)式得:
$$(1-\theta)\||(\nabla-i\vec{a})\varphi_k|\|^2+\|V_k^{1/2}\varphi_k\|^2\leqslant(1+\sqrt{2}+C)\|f\|^2.$$
因此 $\{V_-^{1/2}\varphi_k\}$ 是 $L^2(R^N)$ 中的有界集,不妨假设 $\{V_-^{1/2}\varphi_k\}$ 弱收敛于 η,则有 $\eta=V_-^{1/2}\varphi$, $V_-^{1/2}\varphi_k\xrightarrow[k\to\infty]{w}$

$V_-^{1/2}\varphi$ 同[7]中定理 4.1 的证明，得到任意 $g\in C_0^\infty(R^N)$

$$(g,f)=(F(\vec{a},v)g,\varphi)+(1+i)(g,\varphi).$$

这说明 $\varphi\in D(F)$，$(F+i+1)\varphi=f$，所以$\{\varphi_k\}$的任意弱收敛极限都是$(F+i+1)^{-1}f$，即$(F\vec{a}_k,V_k-V_-)+i+1)^{-1}f\xrightarrow[k\to\infty]{w}(F(\vec{a},V)+i+1)^{-1}f$. 同样，$(F(\vec{a}_k,V_k-V_-)-i+1)^{-1}f\xrightarrow[k\to\infty]{w}(F(\vec{a},V)-i+1)^{-1}f$. 从而由豫解恒等式得此引理.

定理 2.3 的证明 由引理 1.2，对任意 $u\in D(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-))$，$|\partial_j|u||\leqslant|(\partial_j-ia_j^k)u|$，从而有：

$$\|\nabla|u|\|^2\leqslant\sum_{j=1}^N((\partial_j-ia_j^k)u,(\partial_j-ia_j^k)u)\leqslant(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)u,u)+(V_-u,u)$$
$$\leqslant(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)u,u)+\theta\|\nabla|u|\|^2+C\|u\|^2.$$

这里用到 $V_-\in K_N$（见[2]）. 这样得到：

$$\|\nabla|u|\|^2\leqslant\frac{1}{1-\theta}(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)u,u)+\frac{C}{1-\theta}\|u\|^2,\quad u\in D(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)).$$

由于 $V_-\in K_N$，存在常数 $c,c_a>0$，下式成立（[6]Th7.3）$\forall\ u\in D(F(\vec{a}_k,V_-^k-V_-))$：

$$\int_{R^N}|V_--V_-^k||u|^2dx\leqslant c\cdot\omega_{N,a}(V_--V_-^k)\|\nabla|u|\|^2+c_a\omega_{N,1}(V_--V_-^k)\|u\|^2.$$

这样存在 $\varepsilon_k>0$，$\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k=0$，并且$\forall\ u\in D(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-))$，

$$\int_{R^N}|V_--V_-^k||u|^2dx\leqslant\varepsilon_k((F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)u,u)+\|u\|^2.$$

由[4]p340 定理 3.9 得：

$$\|(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-^k)+i+1^{-1}),-(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)+i+1)^{-1}\|$$
$$\leqslant c\cdot\varepsilon_k\|(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-)+i+1)^{-1}\|.$$

由引理 2.4 及 $\varepsilon_k\to0(k\to\infty)$可得$(F(\vec{a}_k,V_+^k-V_-^k)+i+1)^{-1}$强收敛到$(F(\vec{a},V)+i+1)^{-1}$.

由[1]知，K_N 按下述方式构成赋范空间

$$\|V\|_N=\begin{cases}\sup\limits_x\int_{|x-y|\leqslant1}|x-y|^{2-N}|V(y)|dy, & N\geqslant3,\\ \sup\limits_x\int_{|x-y|\leqslant1}\ln\frac{1}{|x-y|}|V(y)|dy, & N=2,\\ \sup\limits_x\int_{|x-y|\leqslant1}|V(y)|dy, & N=1.\end{cases}$$

如果 $V_k,V\in K_N(k=1,2,\cdots)$并且$\|V_k-V\|_N\to0(k\to\infty)$，则由 $\omega_{N,a}$的定义可知，$\lim\limits_{k\to\infty}\omega_{N,a}(V-V_k)=0$. 完全类似定理 2.3 的证明，有：

定理 2.5 $\vec{a},\vec{a}_k(k=1,2,\cdots)$的假设同定理 2.3. $V,V^k\in L_{loc}^1(R^N)$，$(k=1,2,\cdots)$，并且 V_-，$(V^k)_-\in K_N$，$\lim\limits_{k\to\infty}\|V_--(V^k)_-\|_N=0$，$V_+^k\xrightarrow[k\to\infty]{L_{loc}^1}V_+$，则 $F(\vec{a}_k,V^k)$按强豫解式意义收敛到 $F(\vec{a},V)$.

参 考 文 献

[1] M. Aizenman and B. Simon, *Browian motion and harnack inequality for Schrödinger operators*, Commun. Pure. Appl. Math., 35(1982), 209—273.

[2] H. L. Cycon etc., *Schrödinger Operators*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[3] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, New York, 1970.

[4] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[5] H. Leinfelder and C. Simader, *Schrödinger operators with singular magnetic vector potentials*, Math. Z., 176(1981), 1—19.

[6] M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam-New york-Oxford, 1986.

[7] B. Simon, *Maximal and minimal Schrödinger forms*, J. Opt. Theory, 1(1979), 37—47.

On Properties of the Operator $-(\nabla - i\vec{a})^2 + V$ (I)

Yu Kaiqi

(Dept. of Math. Phys. and Mech. Nanjing Univ. Aeron. and Astron. 210016)

Ma Jipu

(Dept. of Math. Nanjing Univ. 210008)

Abstract

In this paper, we consider Schrödinger forms (operators) with singular magnetic vector potentials $-(\nabla - i\vec{a})^2 + V$. We prove that when the negative part V_- of electric potential V satisfies $\int_{R^N} V_-|\phi|^2 dx \le \theta\|\nabla\phi\|^2 + C\|\phi\|^2, \phi \in C_0^\infty(R^N), 0 \le \theta \le 1, C > 0$ independent of V and $\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_N) \in L^2_{\mathrm{loc}}(R^N)^N$, $-(\nabla - i\vec{a})^2 + V$ has essential self-adjoint extension $F(\vec{a}, V)$ and it is the only self-adjoint realization of $-(\nabla - i\vec{a})^2 + V$. Moreover, we consider the continuity of $F(\vec{a}, V)$ respect to $\vec{a}$ and V in the sense of strong resolvent.

Keywords self-adjoint operator, essential self-adjoint extension, Schrödinger operators.