第15卷第4期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

一类整函数的牛顿插值的充要条件*

莫国端
(上海城市建设学院，上海 200092)

关键词 牛顿插值问题，整函数.
分类号 AMS(1991) 30E05/CCL O174.52

定理 1 设 $\psi(r)$ 为定义于 $[0,\infty)$ 上的连续正函数，满足条件 $\lim\limits_{r\to\infty} d\log\psi(r)/d\log r=\rho$，$0<\rho<\infty$. 设 $n(t)$ 是圆 $|z|\leqslant t$ 上所含给定序列 $\{\lambda_n\}$ 的个数，满足条件 $\lim\limits_{r\to\infty} n(r)/\psi(r)=D$，$0<D<\infty$.

设 $h(\rho,\theta)=\int_0^{\frac{1}{2\cos\theta}}\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}dt}{1+t^2-2t\cos\theta}$，$\cos\theta>0$. 对于 $0<\rho<1$，令

$$H(\rho,\theta)=\begin{cases}h(\rho,\theta), & \cos\theta>0,\\ \int_0^\infty\frac{(1-t\cos\theta)t^{\rho-1}dt}{1+t^2-2t\cos\theta}, & \cos\theta\leqslant 0.\end{cases}$$

如果 $f(z)$ 是一个整函数，且存在一个 $\varepsilon>0$，使 $|f(re^{i\theta})|\leqslant Me^{\psi(r)[DH(\rho,\theta)-\varepsilon]}$，则 $f(z)$ 可在全平面内展成内闭一致收敛的牛顿级数：$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\prod\limits_{k=1}^{n}(1-\frac{z}{\lambda_k})$，其中 $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}(\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{s}{\lambda_k}})\frac{f(s)ds}{s-\lambda_{n+1}}$，$C_n$ 为包有点 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1}$ 的任一闭路；反过来，如果函数 $f(z)$ 能展成牛顿级数，则前 n 项部分和有估计式：$|S_n(z)|\leqslant Me^{\psi(r)[DH(\rho,\theta)+\varepsilon]}$，$z=re^{i\theta}$，特别 $|f(z)|\leqslant Me^{\psi(r)[DH(\rho,\theta)+\varepsilon]}$.

定理 2 在定理 1 的条件下，如果序列是复数，$\lambda_n\neq 0$，$(n=1,2,\cdots)$；$0<\rho<1$ 或 $\rho=1$ 但 $\sum|\lambda_n|^{-1}<\infty$，则当 $f(z)$ 有估计式 $|f(z)|\leqslant M\exp\{D\psi(r)(\int_0^1\frac{t^{\rho-1}}{1-t}-\varepsilon)\}$ 时，$f(z)$ 可在全平面内展成内闭一致收敛的级数(6)；反过来，如果 $f(z)$ 能展成级数(6)，则它的前 n 项部分和

$$|S_n(z)|\leqslant\begin{cases}Mr\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{r}{|\lambda_n|}), & \rho=1,\\ \exp[(\frac{D\pi}{\sin\rho\pi}+\varepsilon)\psi(r)], & 0<\rho<1.\end{cases}$$

特别，$|f(z)|$ 不超过上式的右边.

参考文献

[1] 莫国端，一类牛顿插值级数的推广，数学研究与评论，1984，4(2)，47—54.

* 1992年12月13日收到. 95年6月8日收到修改稿.