第15卷第4期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

Cantor 集合上的连续自映射*

顾荣宝
(安徽大学数学系，合肥 230039)

摘　要　本文证明了 Cantor 集 C 上所有拓扑共轭于(单边的)有限型子移位的连续自映射的集合在 $\mathscr{C}$ 中稠密，此外 C 上每个拓扑传递(混合)映射均可被拓扑共轭于有限型子移位的拓扑传递(混合)映射一致逼近.

关键词　Cantor 集，连续自映射，有限型子移位，拓扑传递，拓扑混合.
分类号　AMS(1991) 54H20, 34C35/CCL O189.1

§1　引　言

设 C 为[0,1]中的 Cantor 集合并且具有实直线所诱导的拓扑，$\mathscr{H}$ 为 C 上的所有同胚的集合并赋予一致收敛拓扑所成的空间. M. Sear[1]证明了 C 上所有可扩同胚的集合在 $\mathscr{H}$ 中稠密. M. Dateyama[2]证明了 C 上所有具有伪轨跟踪性质(简记为 POTP)的同胚的集合在 $\mathscr{H}$ 中稠密，T. Shimomura[3]推广上述两个结果，证明了 C 中所有拓扑共轭于(双边的)有限型子移位映射的同胚的集合在 $\mathscr{H}$ 中稠密.

本文研究 Cantor 集合 C 上一般的连续自映射. 记 $\mathscr{C}$ 为 C 上全体连续自映射的集合带有一致收敛拓扑所成的空间. 我们证明了 C 上所有拓扑共轭于(单边的)有限型子移位映射的连续自映射的集合在 $\mathscr{C}$ 中稠密. 即

定理　设 $\mathscr{S}=\{f\in\mathscr{C}: f$ 拓扑共轭于某有限型子移位映射$\}$. 则 $\mathscr{S}$ 在 $\mathscr{C}$ 中稠密. 此外，如果 $f\in\mathscr{C}$ 是拓扑传递(或者拓扑混合)映射，则 f 可由 $\mathscr{S}$ 中的拓扑传递(相应地，拓扑混合)映射一致逼近.

据此，我们有如下

推论　记 $\mathscr{P}=\{f\in\mathscr{C}: p$ 具有 POTP$\}$，$\mathscr{E}=\{f\in\mathscr{C}: f$ 是正向可扩映射$\}$，则 $\mathscr{P}$，$\mathscr{E}$ 分别在 $\mathscr{C}$ 中稠密.

§2　若干术语和引理

设整数 $n>0$，令 $N_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 具有离散拓扑. 令

$$\Sigma_n=\prod_{j=0}^{\infty}N_n=\{x=(x_i)_{i=0}^{\infty}: x_i\in N_n, i=0,1,2,\cdots\}$$

* 1992年10月7日收到.

具有乘积拓扑. 称 Σ_n 为 n 个符号组成的符号空间. Σ_n 是一个紧致、可度量化、全不连通的完全空间. 记 Σ_n 上的一个度量 d 为 $d(x,y)=\sum_{i=0}^{\infty}|x_i-y_i|/2^i$, 其中 $x=(x_i)_{i=0}^{\infty}, y=(y_i)_{i=0}^{\infty}\in\Sigma_n$.

定义移位映射 $\sigma_n:\Sigma_n\to\Sigma_n$ 为 $(\sigma_n(x))_i=x_{i+1}, i=0,1,2,\cdots$, 其中 $x=(x_i)_{i=0}^{\infty}\in\Sigma_n$. σ_n 是一个满的连续映射.

对给定的 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, 其中 $a_{ij}\in\{0,1\}, i,j=1,2,\cdots,n$. 记

$$\Sigma_A=\{x=(x_i)_{i=0}^{\infty}\in\Sigma_n: a_{x_ix_{i+1}}=1, i=0,1,2,\cdots\}.$$

Σ_A 是 Σ_n 的闭的 σ_n-不变子集(即 $\sigma_n(\Sigma_A)\subset\Sigma_A$). 映射 $\sigma_A=\sigma_n|\Sigma_A:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 称为由矩阵 A 所确定的有限型子移位映射.

引理 1 设 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是 $n\times n$ 矩阵, 其中 $a_{ij}\in\{0,1\}, i,j=1,2,\cdots,n$. $\sigma_A:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 是由 A 确定的有限型子移位映射, 则映射 $\sigma_A\times\sigma_m:\Sigma_A\times\Sigma_m\to\Sigma_A\times\Sigma_m$ 拓扑共轭于一个有限型子移位映射.

这里 $\sigma_A\times\sigma_m((x,y))=(\sigma_A(x),\sigma_m(y)), x\in\Sigma_A, y\in\Sigma_m$.

证明 记 $N_n\times N_m=\left\{\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}:k\in N_n, l\in N_m\right\}$, 在 $N_n\times N_m$ 上定义序"$<$"如下:

$$\begin{pmatrix}k\\l\end{pmatrix}<\begin{pmatrix}k'\\l'\end{pmatrix}\Leftrightarrow k<k' \text{ 或者 } k=k' \text{ 且 } l<l'.$$

令 $\widetilde{\Sigma}_{mn}=\prod_{i\neq0}^{\infty}(N_n\times N_m)=\left\{\xi=\left(\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}\right)_{i=0}^{\infty}:x_i\in N_n, y_i\in N_m, i=0,1,2,\cdots\right\}$ 是 mn 个符号的符号空间. 定义 $\widetilde{\Sigma}_{mn}$ 上的移位映射 $\tilde{\sigma}$ 为 $(\tilde{\sigma}(\xi))_i=\begin{pmatrix}x_{i+1}\\y_{i+1}\end{pmatrix}, i=0,1,2,\cdots$, 其中 $\xi=\left(\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}\right)_{i=0}^{\infty}\in\widetilde{\Sigma}_{mn}$.

由于 $\sigma_m:\Sigma_m\to\Sigma_m$ 是由 $m\times m$ 矩阵 $B=(b_{ij})_{i,j=1}^{m}$(其中 $b_{ij}=1, i,j=1,2,\cdots,m$)所确定的有限型子移位映射. 我们定义 $mn\times mn$ 矩阵 $D=(d_{st})_{s,t\in N_n\times N_m}$ 如下:

$$d_{\binom{i}{k}\binom{j}{l}}=a_{ij}b_{kl}=a_{ij},\quad \begin{pmatrix}i\\k\end{pmatrix},\begin{pmatrix}j\\l\end{pmatrix}\in N_n\times N_m.$$

令 $\widetilde{\Sigma}_D=\left\{\left(\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}\right)_{i=0}^{\infty}\in\widetilde{\Sigma}_{mn}:d_{\binom{x_i}{y_i}\binom{x_{i+1}}{y_{i+1}}}=1, i=0,1,2,\cdots\right\}$. 则 $\tilde{\sigma}_D=\tilde{\sigma}|\widetilde{\Sigma}_D:\widetilde{\Sigma}_D\to\widetilde{\Sigma}_D$ 是由矩阵 D 所确定的有限型子移位映射.

定义 $\varphi:\Sigma_A\times\Sigma_m\to\widetilde{\Sigma}_D$, $\varphi((x_i)_{i=0}^{\infty},(y_i)_{i=0}^{\infty})=\left(\begin{pmatrix}x_i\\y_i\end{pmatrix}\right)_{i=0}^{\infty}$, 则 φ 是一个同胚并且 $\tilde{\sigma}_D\circ\varphi=\varphi\circ(\sigma_A\times\sigma_m)$. 引理 1 证毕.

记 X 为拓扑空间. $f:X\to X$ 为连续映射. 如果对 X 的任意非空开子集 U,V, 存在一个整数 $n>0$, 使得 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$, 则称 f 为拓扑传递的; 如果对 X 的任意非空开集 U,V, 存在一个整数 $N>0$, 使得对任意 $n\geqslant N$, 有 $f^n(U)\cap V\neq\varnothing$, 则称 f 为拓扑混合的.

显然, 拓扑混合映射是拓扑传递的.

设 $f:X\to X, g:Y\to Y$, 记 $f\times g:X\times Y\to Y\times Y$ 为 $(f\times g)((x,y))=(f(x),g(y))$, 其中 x

$\in X, y \in Y$，我们有

引理 2 设 $f: X \to X$ 是拓扑混合映射.

(1) 如果 $g: Y \to Y$ 是拓扑传递映射，则 $f \times g$ 是拓扑传递的；

(2) 如果 $g: Y \to Y$ 是拓扑混合的，则 $f \times g$ 也是拓扑混合的.

证明 (2)是明显的. 如果 g 是拓扑传递的，对 Y 的任意非空开子集 U, V，记

$$N(U, V) = \{n > 0 : g^n(U) \cap V \neq \varnothing\},$$

则 $N(U, V)$ 是一个无限集合. 因为对 $n \in N(U, V)$，存在 $m \in N(U \cap g^{-n}(V), U \cap g^{-n}(V))$，从而 $m + n \in N(U, V)$. 因此(1)成立.

设 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是 $n \times n$ 矩阵(其中 $a_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$). 如果对任意 $i, j = 1, 2, \cdots, n$，存在整数 $m = m(i, j) > 0$，使得 $a_{ij}^m > 0$，我们称 A 为不可约的. 这里 $A^m = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{m\text{个}} = (a_{ij}^m)_{i,j=1}^n$.

引理 3 设 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是 $n \times n$ 矩阵，其中 $a_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 若 A 是不可约的，则由 A 所确定的有限型子移位映射 $\sigma_A: \Sigma_A \to \Sigma_A$ 是拓扑传递的.

证明 因为 A 是不可约的，则 A 的最大特征根 $\lambda > 0$. 且有相应的左、右特征向量 $u = (u_1, \cdots, u_n), v = (v_1, \cdots, v_n)$ 满足 $u_i > 0, v_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$. 则有

$$\sum_{i=1}^n u_i a_{ij} = \lambda u_j,\ j = 1, 2, \cdots, n, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j = \lambda v_i,\ i = 1, 2, \cdots, n.$$

不妨假设 $\sum_{i=1}^n u_i v_i = 1$. 令 $p_i = u_i v_i, i = 1, 2, \cdots, n$，及 $p_{ij} = a_{ij} v_j / \lambda v_i, i, j = 1, 2, \cdots, n$. 记 $P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ 是 $n \times n$ 矩阵. $0 \leqslant p_{ij} \leqslant a_{ij}$ 且 $\sum_{i=1}^n p_i p_{ij} = p_j, j = 1, 2, \cdots, n$. 因此由 $(p_1, \cdots, p_n)$ 及 P 所确定的 Markov 测度(见[4]p163)是 σ_A-不变测度.

因为 A 是不可约的，对任意 $i, j = 1, 2, \cdots, n$，存在整数 $m = m(i, j) > 0$ 使得

$$a_{ij}^m = \sum_{l_1, l_2, \cdots, l_{m-1}} a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{m-1}, j} > 0.$$

从而 $p_{ij}^m = \sum_{l_1, l_2, \cdots, l_{m-1}} \frac{a_{il_1} v_{l_1}}{\lambda v_i} \frac{a_{l_1 l_2} v_{l_2}}{\lambda v_{l_1}} \cdots \frac{a_{l_{m-1}, j} v_j}{\lambda v_{l_{m-1}}} = v_j a_{ij}^m / \lambda^m v_i > 0$. 所以 P 也是不可约矩阵. 根据[4]定理 1.13 及定理 5.16，可知 σ_A 是拓扑传递的.

引理 4[5] 设 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ 是 $n \times n$ 矩阵，其中 $a_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = 1, 2, \cdots, n$，则由 A 所确定的有限型子移位映射 $\sigma_A: \Sigma_A \to \Sigma_A$ 是拓扑混合的 $\Leftrightarrow$ 存在整数 $M > 0$ 使得对所有 $m \geqslant M$，有 $a_{ij}^m > 0, i, j = 1, 2, \cdots, n$.

设 (X, d) 是度量空间，$f: X \to X$ 为连续映射. 如果存在常数 $c > 0$ 使得对任意 $x, y \in X$，当 $x \neq y$ 时必有某整数 $n > 0$ 满足 $d(f^n(x), f^n(y)) > c$，则称 f 为正向可扩映射. c 称为 f 的可扩常数.

X 中点列 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$ 称为 f 的 δ-伪轨，如果 $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$ 对每个 $i = 0, 1, 2, \cdots$ 成立.

如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在一个 $\delta > 0$，使得 f 的每一个 δ-伪轨 $\{x_i\}_{i=0}^\infty$，有 $x \in X$ 满足 $d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$ 对 $i = 0, 1, 2, \cdots$ 成立，则称 f 具有伪轨跟踪性质(简记为 POTP).

当 X 是紧致度量空间时，正向可扩性质及有 POTP 均不依赖于相容的度量的选择并且在拓扑共轭下保持不变.

显然，一个有限型子移位映射是正向可扩的，并且还有

引理 5 有限型子移位映射有 POTP.

证明 设 $\sigma_A:\Sigma_A\to\Sigma_A$ 是由矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n, a_{ij}\in\{0,1\}$ 确定的有限型子移位映射.

对任意 $\varepsilon>0$. 取整数 $m>0$ 使 $1/2^m<\varepsilon$. 设 $\{x^j\}_{j=0}^\infty$ 是 σ_A 的一个 $\frac{1}{2^{m+1}}$-伪轨，即 $x^j=(x_i^j)_{i=0}^\infty\in\Sigma_A$ 并且 $d(\sigma_A(x^j, x^{j+1})<1/2^m, j=0,1,2,\cdots$. 因此对所有 $j=0,1,2,\cdots$ 有 $x_{i+1}^j=x_i^{j+1}, i=0,1,\cdots,m$. 令 $x_k=x_0^k, k=0,1,2,\cdots$，记 $x=(x_k)_{k=0}^\infty$. 由于 $a_{x_kx_{k+1}}=a_{x_0^kx_0^{k+1}}=a_{x_0^kx_1^k}=1$，所以 $x\in\Sigma_A$.

又因为对 $j=0,1,2,\cdots$ 及 $i=0,1,\cdots,m$ 有

$$(\sigma_A^j(x))_i=x_{i+j}=x_0^{i+j}=x_i^j.$$

所以 $d(\sigma_A^j(x),x^j)\leqslant 1/2^m<\varepsilon, j=0,1,2,\cdots$. 即 σ_A 有 POTP.

由此引理可以得到 $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}\cap\mathscr{E}$，结合本文定理的结果便可得其推论成立.

§3 定理的证明

给定整数 $r\geqslant1$，我们称 $[i\cdot3^{-r},(i+1)\cdot3^{-r}]\cap C\,(i=0,1,\cdots,3^r-1)$ 是一个秩为 r 的 Cantor 子区间，如果 $(i\cdot3^{-r},(i+1)\cdot3^{-r})\cap C\neq\varnothing$. 所有秩为 r 的 Cantor 子区间按照其在 $[0,1]$ 上的位置，从左至右依次记为 $I(k,r)\,(k=1,2,\cdots,2^r)$ 并且 $\operatorname{diam} I(k,r)=3^{-r}$.

一个 Cantor 区间同胚于 C. 一般地，一个紧致，可度量化，全不连通的完全空间同胚于 C.

定理的证明 设 $f\in\mathscr{C}$. 对任意 $\varepsilon>0$，由 f 在 C 上的一致连续性，选取整数 $r>0$ 满足：$3^{-r}<\varepsilon/2$ 并且使得对任意 $x,y\in C$，当 $|x-y|\leqslant3^{-r}$ 时，$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

记 $n=2^r$. 定义 $n\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ 如下：对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$，

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果 } f(I(i,r))\cap I(j,r)\neq\varnothing,\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

对每个 $i=1,2,\cdots,n$，存在某 $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ 使得 $a_{ij}=1$. 所以，对每个 $i=1,2,\cdots,n$ 令

$$(i)_A=\{x=(x_i)_{i=0}^\infty\in\Sigma_A:x_0=i\}.$$

则 $(i)_A\,(i=1,2,\cdots,n)$ 是非空闭集.

(1) 如果对每个 $i=1,2,\cdots,n$，$(i)_A$ 均为完全集，则 $(i)_A$ 同胚于 C. 因此存在同胚 $\varphi:\Sigma_A\to C$ 使得对每个 $i=1,2,\cdots,n$ 有 $\varphi((i)_A)=I(i,r)$.

令 $g=\varphi\circ\sigma_A\circ\varphi^{-1}$，则 $g\in\mathscr{S}$. 对任意 $x\in C$，假定 $x\in I(i,r)$ 并且 $g(x)\in I(j,r)$，则由于 $\sigma_A(\varphi^{-1}(x))=\varphi^{-1}(g(x))$ 知，$\sigma_A((i)_A)\cap(j)_A\neq\varnothing$. 因此 $a_{ij}=1$. 从而存在 $y\in I(i,r)$ 使得 $f(y)\in I(j,r)$. 故有 $|f(x)-g(x)|\leqslant|f(x)-f(y)|+|f(y)-g(x)|<\varepsilon/2+3^{-r}<\varepsilon$.

(2) 一般情形，可考虑乘积空间 $\Sigma_A\times\Sigma_2$ 上的移位映射 $\sigma_A\times\sigma_2$. 对于每个 $i=1,2,\cdots,n$，由于 $(i)_A$ 是闭集，Σ_2 是完全集，故 $(i)_A\times\Sigma_2$ 是完全集，因此存在同胚 $\varphi:\Sigma_A\times\Sigma_2\to C$ 使得 $\varphi((i)_A\times\Sigma_2)=I(i,r), i=1,2,\cdots,n$. 令 $g=\varphi\circ(\sigma_A\times\sigma_2)\circ\varphi^{-1}$，类似(1)的证明可以得到 $|f(x)-g(x)|<\varepsilon$ 对任意 $x\in C$ 成立. 由引理 1 知 $\sigma_A\times\sigma_2$ 拓扑共轭于一个有限子移位映射. 因而 $g\in\mathscr{S}$.

下面证明定理的后半部分.

设 $f\in\mathscr{C}$ 是拓扑传递的. 只须证明(2)中得到的 g 也是拓扑传递的. 对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$. 由 f 的拓扑传递性,存在整数 $m=m(i,j)>0$ 使得 $f^m(I(i,r))\cap I(j,r)\neq\varnothing$. 即存在 $x\in I(i,r)$ 使得 $f^m(x)\in I(j,r)$. 记 $f^k(x)\in I(l_k,r)$, $k=1,2,\cdots,m-1$. 则 $f(I(i,r))\cap I(l_1,r)\neq\varnothing$, $f(I(l_{m-1},r))\cap I(j,r)\neq\varnothing$ 以及 $f(I(l_k,r))\cap I(l_{k+1},r)\neq\varnothing$, $k=1,2,\cdots,m-2$. 从而 $a_{ij}^m=\sum\limits_{l_1,l_2,\cdots,l_{m-1}} a_{il_1}a_{l_1l_2}\cdots a_{l_{m-1},j}\geqslant a_{il_1}a_{l_1l_2}\cdots a_{l_{m-1},j}=1>0$. 因此,$A$ 是不可约矩阵,由引理 3 知,σ_A 是拓扑传递的. 注意 σ_2 是拓扑混合的,据引理 2 知 $\sigma_A\times\sigma_2$ 是拓扑传递的,因此 g 是拓扑传递的.

其次,如果 $f\in\mathscr{C}$ 是拓扑混合的,则对任意 $i,j=1,2,\cdots,n$,存在整数 $M(i,j)>0$ 使得对任意整数 $m\geqslant M(i,j)$ 有 $f^m(I(i,r))\cap I(j,r)\neq\varnothing$. 从而对所有 $m\geqslant M(i,j)$, $a_{ij}^m>0$.

令 $M=\max\{M(i,j);i,j=1,2,\cdots,n\}>0$,则对任意 $m\geqslant M$,有 $a_{ij}^m>0$, $i,j=1,2,\cdots,n$. 由引理 4 知 σ_A 是拓扑混合映射,从而 $\sigma_A\times\sigma_2$ 也是拓扑混合映射,因此 g 是拓扑混合的.

本文的写作得到我的导师麦结华教授的指导,谨此致以衷心感谢.

参 考 文 献

[1] M. Sear, *Expansive self-homeomorphisms of the cantor set*, Math. Systems Theory, 6(1972), 129—132.

[2] M. Dateyama, *Homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of the Cantor set*, Tokyo J. Math., 6(1983), 289—290.

[3] T. Shimomura, *The pseudo-orbit tracing property and expansiveness on the Cantor set*, Proc. A.M.S., 1(1989), 241—244.

[4] P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1982.

[5] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

Continuous Maps on the Cantor Set

Gu Rongbao

(Dept. of Math., Anhui University, Heifei 230039)

Abstract

In this paper we show that the set of all the continuous maps which are topologically conjugate to subshift of finite type is dense in the space of all the continuous maps of the Cantor set with the topology of uniform convergence. Moreover, a topologically transitive(resp. mixing) map of the cantor set is approximated uniformly by topologically transitive(resp. mixing) map which is topologically conjugate to subshift of finite type.

Keywords Cantor set, continuous map, subshift of finite type, topologically transitive topologically mixing.