第15卷第4期 1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 4 Nov. 1995

关于积流形的P-形式上的Laplace算子谱*

瞿成勤
(海军电子工程学院数学教研室，南京211800)

摘要 本文讨论了积流形的P-形式上Laplace算子谱的唯一性问题.在紧Kaehler流形乘积和紧Sasaki流形乘积的两类积流形中，$CP^n\times CP^n$和$S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)$是$P$-形式上Laplace算子谱特征.

关键词 Kaehler流形,Sasaki流形,上同调Einstein,谱.
分类号 AMS(1991) 53C42/CCL O186.16

§1 引言

设(M,g)是m维紧致定向黎曼流形，$\Lambda^p(M)$表示M上的p-形式所形成的向量空间，此处$p=0,1,2,\cdots,m$.用$\mathrm{Spec}^p(M,g)$表示M的Laplace算子作用$\Lambda^p(M)$上的谱.

陆志勤和陈志华[1]讨论了乘积流形上Laplace算子作用在2-形式上的谱，证明了

定理[1] 若M_1,M_2是n维紧Kaehler流形，CP^n是有全纯截面曲率为1的标准度量的Kaehler流形.若$M_1\times M_2$是同调Einstein的，且

$$\mathrm{Spec}^2(M_1\times M_2,g)=\mathrm{Spec}^2(CP^n\times CP^n),$$

则M_1,M_2都等距同构于CP^n.

本文讨论乘积流形上的Laplace算子作用在p-形式上的谱情况，证明了下面结论，从而拓广了上述结论.

定理1 若M_1,M_2是复n维紧Kaehler流形，CP^n是有全纯截面曲率为1的标准度量的Kaehler流形，若$M_1\times M_2$是上同调Einstein的，且

$$\mathrm{Spec}^p(M_1\times M_2,g)=\mathrm{Spec}^p(CP^n\times CP^n),\quad 0\leqslant P\leqslant 4n.$$

如果$p^2-4np+2n(4n-1)/3\neq 0$且$n\geqslant 16$，则M_1,M_2都等距同构于CP^n.

如果将上定理条件"$M_1\times M_2$是上同调Einstein的"换成$M_1\times M_2$的Euler示性数与$CP^n\times CP^n$的Euler示性数相等，有类似的结论.

定理2 若M_1,M_2是复n维紧Kaehler流形，CP^n是有全纯截面曲率为1的标准度量的Kaehler流形，若$\chi(M_1\times M_2)=\chi(CP^n\times CP^n)$，且

$$\mathrm{Spec}^p(M_1\times M_2,g)=\mathrm{Spec}^p(CP^n\times CP^n).$$

* 1993年5月7日收到.江西省自然科学基金资助课题.

如果 i) $p \leqslant 2n - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{10n(12n^2-12n+1)}{2n-1}}$， (ii) $p^2 - 4np + 2n(4n-1)/3 \neq 0$，则 M_1, M_2 都等距同构于 CP^n.

特别地，对 $n=4$ 时，有

定理 3 若 M_1, M_2 是复 4 维紧 Kaehler 流形，CP^4 是有全纯截面曲率为 1 的标准度量的 Kaehler 流形，若

$$\mathrm{Spec}^2(M_1 \times M_2, g) = \mathrm{Spec}^2(CP^4 \times CP^4),$$

则 M_1, M_2 都等距同构于 CP^4.

本文进一步讨论积流形是两个 Sasaki 流形乘积的情况，得出

定理 4 若 M_1, M_2 是 $2n+1$ 维紧致上同调 Einstein 的 Sasaki 流形，$S^{2n+1}(1)$ 是 $2n+1$ 维常曲率 1 的球面，若 $\mathrm{Vol}(M_1) = \mathrm{Vol}(M_2)$，且

$$\mathrm{Spec}^p(M_1 \times M_2, g) = \mathrm{Spec}^p(S^{2n+1}(1) \times S^{2n+1}(1)), \quad 0 \leqslant p \leqslant 4n+2,$$

如果 $c_0 \neq 0, c_1, c_2, c_3$ 均大于 0，则 M_1, M_2 都等距同构于 $S^{2n+1}(1)$. 其中

$$c_0 = \frac{1}{6}\binom{4n+2}{p} - \binom{4n}{p-1},$$

$$c_1 = \frac{1}{72}\binom{4n+2}{p} - \frac{1}{6}\binom{4n}{p-1} + \frac{1}{2}\binom{4n-2}{p-2},$$

$$c_2 = -\frac{1}{180}\binom{4n+2}{p} + \frac{1}{2}\binom{4n}{p-1} - 2\binom{4n-2}{p-2},$$

$$c_3 = \frac{1}{180}\binom{4n+2}{p} - \frac{1}{12}\binom{4n}{p-1} + \frac{1}{2}\binom{4n-2}{p-2}.$$

§2 预备知识

设 (M, g) 是紧致连通的黎曼流形，对 $p = 0, 1, \cdots, m$，设 $\Lambda^p(M)$ 表示 M 上的 p-形式形成的向量空间，设 $\Delta = -(dd^* + d^*d)$ 是作用在 p-形式上的 Laplace 算子，这里 d 表示外微分算子，d^* 表示它的共轭算子，那么对 $p = 0, 1, 2, \cdots, m$，我们有 Δ 的谱

$$\mathrm{Spec}^p(M, g) = \{0 \geqslant \lambda_{1,p} \geqslant \lambda_{2,p} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{k,p} \cdots \downarrow -\infty\},$$

从而有下列的 Minakshisundarum-Pleijel-Gaffney 渐近公式

$$\sum_{k=0}^{\infty} \exp\{\lambda_{k,p} t\} = (4\pi t)^{-m/2} \sum_{i=0}^{N} a_{i,p} t^i + O(t^{N-m/2+1}), \quad t \downarrow 0,$$

由 Patodi[2]，实系数 $a_{i,p}$ 有下列计算公式

$$a_{0,p} = \binom{m}{p} V, \quad V = \mathrm{Vol}(M), \tag{2.1}$$

$$a_{1,p} = \int_M c(m,p)\rho * 1, \tag{2.2}$$

$$a_{2,p} = \int_M (c_1(m,p)\rho^2 + c_2(m,p)|S|^2 + c_3(m,p)|R|^2) * 1, \tag{2.3}$$

其中

$$c(m,p)=\frac{1}{6}\binom{m}{p}-\binom{m-2}{p-1},$$

$$c_1(m,p)=\frac{1}{72}\binom{m}{p}-\frac{1}{6}\binom{m-2}{p-1}+\frac{1}{2}\binom{m-4}{p-2},$$

$$c_2(m,p)=-\frac{1}{180}\binom{m}{p}+\frac{1}{2}\binom{m-2}{p-1}-2\binom{m-4}{p-2},$$

$$c_3(m,p)=\frac{1}{180}\binom{m}{p}-\frac{1}{12}\binom{m-2}{p-1}+\frac{1}{2}\binom{m-4}{p-2}.$$

此处^{*1}表示M的体积元,R,S,ρ分别表示M的曲率张量、Ricci的曲率张量和纯量曲率,而$|R|,|S|$分别表示R,S关于黎曼度量g的模,定义为

$$|R|^2=\sum R^{ijkl}R_{ijkl}, \tag{2.4}$$

$$|S|^2=\sum R^{ij}R_{ij}, \tag{2.5}$$

R_{ijkl}和R_{ij}分别表示曲率张量R和Ricci张量S的分量.

对于Kaehler流形,有

$$|R|^2\geqslant\frac{4}{n+1}|S|^2. \tag{2.6}$$

$$|S|^2\geqslant\frac{1}{2n}\rho^2, \tag{2.7}$$

等号成立当且仅当M有常全纯截面曲率.

对于$2n+1$维Sasaki流形,有

$$|R|^2\geqslant\frac{1}{n(2n+1)}\rho^2, \tag{2.8}$$

$$|S|^2\geqslant\frac{1}{2n+1}\rho^2, \tag{2.9}$$

等号成立当且仅当M有常截面曲率.

设(M,g)是Kaehler流形,J是它的近复结构,Ω是它的基本2-形式,令$\tilde{S}(X,Y)=S(X,JY)$,如果$[\tilde{S}]=a[\Omega]$,$a\in R$,这儿$[\tilde{S}]$和$[\Omega]$分别是由$\tilde{S}$和Ω代表的$H^2(M,R)$的上同调类,那么称M是上同调Einstein的.

最后,设M是有Sasaki结构(φ,ξ,η,g)的$2n+1$维Sasaki流形,定义$\tilde{S}(X,Y)=S(X,\varphi Y)$,那么$\tilde{S}$是$M$上对称二次型,如果$[\tilde{S}]=a[\Phi]$,$a\in R$,那么称该Sasaki流形为上同调Einstein的,其中$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$.

§3 定理的证明

为证明定理1,我们引进K. Ogiue的一个引理.

引理1[3] 若M是$2n$维上同调Einstein的Kaehler流形,则

$$\int_M\left(|S|^2-\frac{1}{2}\rho^2\right)^*1+\frac{2n-1}{4nv}\left(\int_M\rho^*1\right)^2=0, \tag{3.1}$$

定理 1 的证明 设 $a_{i,p}$ 和 $a'_{i,p}$ $(i=0,1,\cdots,m)$ 分别表示 $M_1\times M_2$ 和 $CP^n\times CP^n$ 的 Minakshisundarum-Pleijel-Gaffney 系数，并以 c_1,c_2,c_3 简记 $c_1(4n,p)$，$c_2(4n,p)$ 和 $c_3(4n,p)$，由于 CP^n 的全纯截面曲率为 1，故

$$\rho' = 2n(n+1),\ |S'|^2 = n(n+1)^2,\ |R'|^2 = 4n(n+1). \tag{3.2}$$

由[1]知，若能证明

$$\int_M |R|^2 {*1} = \frac{1}{n(n+1)}\int_M \rho^2 {*1}, \tag{3.3}$$

即知 M_1, M_2 都等距同构于 CP^n. 下面证明(3.3)式.

当 $p^2-4np+2n(4n-1)/3\neq 0$ 时，由

$$\begin{aligned} a'_{2,p} &= \int_{CP^n\times CP^n}(c_1\rho'^2 + c_2|S'|^2 + C_3|R'|^2) {*1} \\ &= \left(c_1 + \frac{1}{4n}c_2 + \frac{1}{n(n+1)}c_3\right)\left(\int_{CP^n\times CP^n}\rho' {*1}\right)^2/\mathrm{Vol}(CP^n\times CP^n), \end{aligned} \tag{3.4}$$

以及 $a_{0,p}=a'_{0,p}$，$a_{1,p}=a'_{1,p}$ 得

$$a'_{2,p} = \left(c_1 + \frac{1}{4n}c_2 + \frac{1}{n(n+1)}c_3\right)\left(\int_M \rho {*1}\right)^2/\mathrm{Vol}(M), \tag{3.5}$$

另一方面，由引理 1 及 $a_{2,p}=a'_{2,p}$ 得

$$\begin{aligned} &\int_M c_3\left(|R|^2 - \frac{1}{n(n+1)}\rho^2\right){*1} + \left(c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{n(n+1)}c_3\right)\int_M \rho^2 {*1} \\ &= \left(c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{n(n+1)}c_3\right)\left(\int_M \rho {*1}\right)^2/\mathrm{Vol}(M). \end{aligned} \tag{3.6}$$

i) 当 $p=0$ 时，$c_3=\frac{1}{180}>0$，$c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3=\frac{1}{90}+\frac{1}{180n(n+1)}>0$；

ii) 当 $p=1$ 时，$c_3=\frac{1}{45}n-\frac{1}{12}>0$，$(n\geqslant 16)$，$c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3=\frac{2}{45}n+\frac{1}{12}+\frac{1}{n(n+1)}c_3>0$；

iii) 当 $p=2$ 时，由[1]知 $c_3>0$，$c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3>0$；

iv) 当 $p=3,4$ 时，通过计算得 $c_3>0$，$c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3>0$，$(n\geqslant 16)$；

v) 当 $5\leqslant p\leqslant 4n-2$ 时

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{180}\binom{4n}{p} - \frac{1}{12}\binom{4n-2}{p-1} + \frac{1}{2}\binom{4n-4}{p-2} \\ &= \frac{1}{p!}(4n-4)(4n-5)\cdots(4n-p+1)\Big\{\frac{1}{180}\cdot 4n(4n-1)(4n-2)(4n-3) \\ &\quad + \frac{1}{12}p(4n-p)[6p(4n-p)-16n^2-4n]\Big\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

令 $x=p(4n-p)$，显然

$$0\leqslant x\leqslant 4n^2, \tag{3.8}$$

记

$$A(n,x) = \frac{1}{180}\cdot 4n(4n-1)(4n-2)(4n-3) + \frac{1}{12}x(6x-16n^2-4n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}n(4n+1)\right)^2+\frac{1}{90}n(48n^3-232n^2+83n-12) \\
&\geqslant \frac{1}{90}n(48n^3-232n^2+83n-12)>0,\ (n\geqslant 16),
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

因此，$c_3>0$.

另外

$$
\begin{aligned}
c_1+\frac{1}{2}c_2 &= \frac{1}{90}\binom{4n}{p}+\frac{1}{12}\binom{4n-2}{p-1}-\frac{1}{2}\binom{4n-4}{p-2} \\
&= \frac{1}{p!}(4n-4)\cdots(4n-p+1)\{\frac{1}{90}\cdot 4n(4n-1)(4n-2)(4n-3) \\
&\quad -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}n(4n+1)x\},
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

记

$$
\begin{aligned}
B(n,x) &= -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}n(4n+1)x+\frac{1}{90}\cdot 4n(4n-1)(4n-2)(4n-3) \\
&= -\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{3}n(4n+1)\right]^2+\frac{1}{90}n(336n^3-344n^2+181n-24].
\end{aligned}
$$

因为

$$
\left|x-\frac{1}{3}n(4n+1)\right|\leqslant\left|4n^2-\frac{1}{3}n(4n+1)\right|=\frac{1}{3}(8n^2-n),
$$

于是 $B(n,x)\geqslant\frac{1}{90}n(16n^3-264n^2+176n-24)>0,(n\geqslant 16)$，因此，当 $n\geqslant 16, 5\leqslant p\leqslant 4n-2$ 时，恒有 $c_3>0,\ c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3>0$.

vi) 当 $p=4n-1$ 和 $4n$ 时，如果 $n\geqslant 16$，显然有 $c_3>0,\ c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3>0$.

综合 i)—iv)，当 $n\geqslant 16$ 时，恒有 $c_3>0,\ c_1+\frac{1}{2}c_2+\frac{1}{n(n+1)}c_3>0$，故由 Cauchy 不等式

$$
\int_M \rho^2 * 1\geqslant\left(\int_M \rho * 1\right)^2/\mathrm{Vol}(M). \tag{3.11}
$$

和(3.6)式，有 $\int_M |R|^2 * 1=\int_M \frac{1}{n(n+1)}\rho^2 * 1$. 从而定理 1 得证.

为证定理 2，我们需要下面引理

引理 2[4] 设 M 是紧致黎曼流形，则 M 的 Euler 示性数为

$$
\chi(M)=\frac{1}{32\pi^2}\int_M(|R|^2-4|S|^2+\rho^2) * 1.
$$

定理 2 的证明

$$
\begin{aligned}
a_{2,p} &= \int_M(c_3|R|^2+c_2|S|^2+c_1\rho^2) * 1 \\
&= \int_M[c_3(|R|^2-4|S|^2+\rho^2)+(c_2+4c_3)|S|^2+(c_1-c_3)\rho^2] * 1 \\
&= 32\pi^2c_3\chi(M_1\times M_2)+(c_2+4c_3)\int_M\left(|S|^2-\frac{1}{4n}\rho^2\right) * 1+\frac{1}{4n}[(c_2+4c_3)
\end{aligned}
$$

$$+ 4n(c_1 - c_3)\Big] \int_M \rho^2 {}^*1, \tag{3.13}$$

$$a'_{2,p} = 32\pi^2 c_3 \chi(CP^n \times CP^n) + \frac{1}{4n}\Big[(c_2 + 4c_3) + 4n(c_1 - c_3)\Big] \int_{M'} \rho^2 {}^*1. \tag{3.14}$$

由 $\chi(M_1 \times M_2) = \chi(CP^n \times CP^n)$ 及 $a_{2,p} = a'_{2,p}$ 得

$$(c_2 + 4c_3) \int_M \Big(|S|^2 - \frac{1}{4n}\rho^2\Big) {}^*1 + \frac{1}{4n}\Big[(c_2 + 4c_3) + 4n(c_1 - c_3)\Big] \int_M \rho^2 {}^*1$$

$$= \frac{1}{4n}\Big[(c_2 + 4c_3) + 4n(c_1 - c_3)\Big] \int_{M'} \rho'^2 {}^*1. \tag{3.15}$$

当 $0 \leqslant p \leqslant 2n - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{10n(12n^2 - 12n + 1)}{2n - 1}}$ 时，经计算得

$$c_2 + 4c_3 + 4n(c_1 - c_3) = \frac{1}{60}\left[(2n + 1)\binom{4n}{p} - 10(2n - 1)\binom{4n - 2}{p - 1}\right] > 0, \tag{3.16}$$

由 ρ' 为常数，$a_{0,p} = a'_{0,p}$，$a_{1,p} = a'_{1,p}$，当 $p^2 - 4np + 2n(4n - 1)/3 \neq 0$ 时，有

$$\Big(\int_M {}^*1\Big)\Big(\int_M \rho^2 {}^*1\Big) \geqslant \Big(\int_M \rho\, {}^*1\Big)^2 = \Big(\int_{M'} \rho'\, {}^*1\Big)^2 = \rho'^2\Big(\int_{M'} {}^*1\Big)^2$$

$$= \rho'^2\Big(\int_M {}^*1\Big)\Big(\int_{M'} {}^*1\Big) = \Big(\int_M {}^*1\Big)\Big(\int_{M'} \rho'^2 {}^*1\Big). \tag{3.17}$$

因此

$$\int_M \rho^2 {}^*1 \geqslant \int_{M'} \rho'^2 {}^*1, \tag{3.18}$$

其中 $M = M_1 \times M_2$，$M' = CP^n \times CP^n$，由(3.14)，(3.16)，(3.17)知

$$(c_2 + 4c_3) \int_M \Big(|S|^2 - \frac{1}{4n}\rho^2\Big) {}^*1 \leqslant 0. \tag{3.19}$$

而 $c_2 + 4c_3 = \frac{1}{60}\binom{4n}{p} + \frac{1}{6}\binom{4n - 2}{p - 1} > 0$，

$$\int_M |S|^2 {}^*1 \geqslant \mathrm{Vol}(M\ {}^*1) \int_{M_1} |S_1|^2 {}^*1 + \mathrm{Vol}(M_1) \int_{M_2} |S_2|^2 {}^*1 \geqslant \frac{1}{4n} \int_M \rho^2 {}^*1, \tag{3.20}$$

故 $|S|^2 = \frac{1}{4n}\rho^2$，且 $\rho = \rho'$，再由 $\int_M (|R|^2 - 4|S|^2 + \rho^2)\, {}^*1 = \int_{M'} (|R'|^2 - 4|S'|^2 + \rho'^2)\, {}^*1$ 得

$$\int_M |R|^2 {}^*1 = \int_M \frac{1}{n(n + 1)} \rho^2 {}^*1, \tag{3.21}$$

从而定理 2 得证.

推论　若 M_1, M_2 是复 2 维紧 Kaehler 流形，CP^2 是有全纯截面曲率为 1 的标准度量的 Kaehler 流形，若 $\chi(M_1 \times M_2) = \chi(CP^2 \times CP^2)$，且 $\mathrm{Spec}^1(M_1 \times M_2, g) = \mathrm{Spec}^1(CP^2 \times CP^2)$，则 M_1, M_2 都等距同构于 CP^2.

定理 3 的证明　当 $n = 4$，$p = 2$ 时，

$$c_3 = \frac{1}{180}\binom{16}{2} - \frac{1}{12}\binom{14}{1} + \frac{1}{2} = 0, \tag{3.22}$$

因此

$$a_{2,2} = \int_M \Big(\frac{13}{3}|S|^2 - \frac{1}{6}\rho^2\Big) {}^*1 = \int_M \frac{13}{3}\Big(|S|^2 - \frac{1}{16}\rho^2\Big) {}^*1 + \int_M \frac{5}{48}\rho^2 {}^*1, \tag{3.23}$$

由 $a_{2,2}=a'_{2,2}$ 及 $\int_M \rho^2 * 1 \geqslant \int_M \rho'^2 * 1$ 得

$$\int_M |S|^2 * 1 \leqslant \frac{1}{16}\int_M \rho^2 * 1, \tag{3.24}$$

从而由 $\int_M |S|^2 \geqslant \frac{1}{16}\int_M \rho^2 * 1$ 知 $M=M_1\times M_2$ 是有正纯量曲率的 Kaehler-Einstein 流形，再由[1]知 M_1, M_2 都等距同构于 CP^4.

为证明定理 4，首先叙述下面引理.

引理 3[5] 设 (M,g) 是 $2n+1$ 维上同调 Einstein 的紧 Sasaki 流形，则

$$\int_M (|S|^2 - \frac{1}{2}\rho^2 + 2\rho) * 1 + \frac{n-1}{2nV}(\int_M \rho * 1)^2 = 2n(2n+1)V. \tag{3.25}$$

引理 4 设 M_1, M_2 都是 $2n+1$ 维上同调 Einstein 的紧 Sasaki 流形，且 $\mathrm{Vol}(M_1)=\mathrm{Vol}(M_2)$，$M=M_1\times M_2$. S 和 ρ 分别表示 M 的 Ricci 张量和纯量曲率，则

$$\int_M (|S|^2 - \frac{1}{4n}\rho^2 + 2\rho) * 1 \geqslant 4n(2n+1)V. \tag{3.26}$$

证明 因为 M_1, M_2 均为上同调 Einstein 的紧致 Sasaki 流形，由引理 3 有

$$\int_{M_i} (|S_i|^2 - \frac{1}{2}\rho_i^2 + 2\rho_i) * 1 + \frac{n-1}{2nV_i}(\int_{M_i} \rho_i * 1)^2 = 2n(2n+1)V_i, \quad i=1,2, \tag{3.27}$$

其中 $V_i=\mathrm{Vol}(M_i)$，S_i, ρ_i 分别表示 M_i 的 Ricci 张量和纯量曲率.

(3.27)等价于

$$\int_{M_1} (|S_1|^2 - \frac{1}{2}\rho_1^2 + 2\rho_1) * 1 + \frac{n-1}{2nV_1}(\int_{M_1} \rho_1 * 1)^2 = 2n(2n+1)v,$$

$$\int_{M_2} (|S_2|^2 - \frac{1}{2}\rho_2^2 + 2\rho_2) * 1 + \frac{n-1}{2nV_2}(\int_{M_2} \rho_2 * 1)^2 = 2n(2n+1)V.$$

上两式相加得

$$\int_M (|S|^2 - \frac{1}{2}(\rho_1^2+\rho_2^2) + 2\rho) * 1 + \frac{n-1}{2n}[(\int_{M_1} \rho_1 * 1)^2 + (\int_{M_2} \rho_2 * 1)^2]$$
$$= 4n(2n+1)V, \tag{3.28}$$

利用 $V_i\int_{M_i} \rho_i^2 * 1 \geqslant (\int_{M_i} \rho_i * 1)^2$, $i=1,2$ 得

$$\int_M (|S|^2 - \frac{1}{2n}(\rho_1^2+\rho_2^2) + 2\rho) * 1 \geqslant 4n(2n+1)V, \tag{3.29}$$

而

$$\frac{1}{2}(\rho_1^2+\rho_2^2) \geqslant (\frac{\rho_1+\rho_2}{2})^2 = \frac{\rho^2}{4}, \tag{3.30}$$

因此 $\int_M (|S|^2 - \frac{1}{4n}\rho^2 + 2\rho) * 1 \geqslant 4n(2n+1)V$.

下面证定理 4.

对于流形 $S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)$，有

$$\rho' = 4n(2n+1), \tag{3.31}$$

$$|S'|^2 = 8n^2(2n+1), \tag{3.32}$$

$$|R'|^2 = 8n(2n+1), \tag{3.33}$$

于是

$$a'_{2,p}=\int_{S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)}(c_1(\rho')^2+c_2|S'|^2+c_3|R'|^2)*1 \tag{3.34}$$

$$=(c_1+\frac{1}{2(2n+1)}c_2+\frac{1}{2n(2n+1)}c_3)(\int_{S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)}\rho')^2/\mathrm{Vol}(S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)),$$

$$a_{2,p}=\int_{M_1\times M_2}(c_1\rho^2+c_2|S|^2+c_3|R|^2)*1$$

$$=c_2\int_{M_1\times M_2}(|S|^2-\frac{1}{4n}\rho^2+2\rho)*1+c_3\int_{M_1\times M_2}(|R|^2-\frac{1}{2n(2n+1)}\rho^2)*1$$

$$+\int_{M_1\times M_2}(c_1+\frac{1}{4n}c_2+\frac{1}{2n(2n+1)}c_3)\rho^2*1-2c_2\int_{M_1\times M_2}\rho*1. \tag{3.35}$$

由引理 4，当 $c_2\geqslant 0$ 时，有

$$a_{2,p}\geqslant 4n(2n+1)c_2V+c_3\int_{M_1\times M_2}(|R|^2-\frac{1}{2n(2n+1)}\rho^2)*1$$

$$+(c_1+\frac{1}{4n}c_2+\frac{1}{2n(2n+1)}c_3)\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1-2c_2\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1. \tag{3.36}$$

由于 c_1,c_2 均大于 0，$c_0\neq 0$，由 $a_{0,p}=a'_{0,p}$，$a_{1,p}=a'_{1,p}$ 及

$$\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1\geqslant(\int_{M_1\times M_2}\rho*1)^2/\mathrm{Vol}(M_1\times M_2), \tag{3.37}$$

得

$$a_{2,p}\geqslant -4n(2n+1)c_2v+c_3\int_{M_1\times M_2}(|R|^2-\frac{1}{2n(2n+1)}\rho^2)*1+\frac{1}{4n(2n+1)}c_2\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1$$

$$+(c_1+\frac{1}{2(2n+1)}c_2+\frac{1}{2n(2n+1)}c_3)(\int_{M_1\times M_2}\rho*1)^2/\mathrm{Vol}(M_1\times M_2). \tag{3.38}$$

由 $a_{2,p}=a'_{2,p}$ 得

$$4n(2n+1)c_2V-\frac{c_2}{4n(2n+1)}\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1\geqslant c_3\int_{M_1\times M_2}(|R|^2-\frac{1}{2n(2n+1)}\rho^2)*1 \tag{3.39}$$

由于

$$\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1\geqslant(\int_{M_1\times M_2}\rho*1)^2/V=(\int_{S^{2n+1}\times S^{2n+1}}\rho'*1)^2/V=16n^2(2n+1)^2V, \tag{3.40}$$

另外，由(3.39)，(3.40)知

$$\int_{M_1\times M_2}(|R|^2-\frac{1}{2n(2n+1)}\rho^2)*1\leqslant 0, \tag{3.41}$$

$$\int_{M_1\times M_2}|R|^2*1=\int_{M_1\times M_2}(|R_1|^2+|R_2|^2)*1\geqslant\mathrm{Vol}(M_2)\int_{M_1}\frac{1}{n(2n+1)}\rho_1^2*1$$

$$+\mathrm{Vol}(M_1)\int_{M_2}\frac{1}{n(2n+1)}\rho_2^2*1=\int_{M_1\times M_2}\frac{1}{n(2n+1)}(\rho_1^2+\rho_2^2)*1$$

$$\geqslant\frac{1}{2n(2n+1)}\int_{M_1\times M_2}\rho^2*1. \tag{3.42}$$

由(3.41),(3.42)得$|R|^2=\frac{1}{2n(2n+1)}\rho^2$, $\rho_1=\rho_2$,从而$|R_1|^2=\frac{\rho_1^2}{n(2n+1)}$, $|R_2|^2=\frac{\rho_2^2}{n(2n+1)}$.因此,$M_1$,$M_2$都等距同构于$S^{2n+1}(1)$.

特别地,当$p=2$时,有

推论 若M_1,M_2都是$2n+1$维上同调Einstein的紧Sasaki流形,$S^{2n+1}(1)$是截面曲率为1的球面,其中$5\leqslant n\leqslant 43$,且

$$\mathrm{Vol}(M_1)=\mathrm{Vol}(M_2),\quad \mathrm{Spec}^2(M_1\times M_2,g)=\mathrm{Spec}^2(S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)),$$

则M_1,M_2都等距同构于$S^{2n+1}(1)$.

在本文写作过程中得到了江西大学欧阳崇珍教授的悉心指导,作者谨在此表示衷心的感谢.

参 考 文 献

[1] 陆志勤、陈志华,关于积流形2-形式上的Laplace算子谱,数学学报,Vol. 35, No. 2(1992), 178—184.

[2] V. K. Patodi, *Curvature and fundamental of the heat operator*, J. Indian Math. Soc., 34(1970), 269—285.

[3] K. Ogiue, *Generalized scalar curvature of cohomological Einstein-Kähler manifolds*, J. Diff. Geom, 10(1975), 201—205.

[4] M. Berger, P. et Ganduchon E. Le. Mazet, *Spectre d'une Variéte Riemannienne*, Springer-Verlag Berlin, New York, Lecture Notes in Math., 194(1972).

[5] H. Gauchman and S. I. Galdberg, *Spectral rigidity of compact Kaehler and contact manifolds*, Tôhoku Math. J., 38(1986), 563—573.

On the Laplacian Spectrum on the p-forms on the Product Riemannian Manifolds

Qu Chengqin
(Naval Electronic Engineering College, Nanjing 210800)

Abstract

In this paper, it is proved that $CP^n\times CP^n$ and $S^{2n+1}(1)\times S^{2n+1}(1)$ are uniquely characterized among the classes of the Riemannian products of compact Kachler manifolds and the Riemannian products of compact Sasakian manifolds, respectively, by the Laplacian spectrum on p- forms for some p.

Keywords Kachler manifold, Sasakian manifold, cohomalogically Einstein, spectrum.