第15卷第4期 数 学 研 究 与 评 论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

齐型空间上的极大算子的BMO有界性*

王　杰
(北京大学数学系，100871)

摘　要　本文完全解决了满足条件"所有开球都是开集且连续函数全体在 L^1 中稠"的齐型空间上的 H－L 极大算子的 BMO 有界性.

关键词　齐型空间，H－L 极大算子，BMO.
分类号　AMS(1991) 47B10/CCL O177.1

一　定义与基本性质

(1)　设 X 为非空集合，在 $X\times X$ 上给定一个非负对称函数 d 称为拟距离；即存在一个常数 $k>0$，使得对于一切 $x,y,z\in X$ 有 $d(x,y)\leqslant k[d(x,y)+d(y,z)]$，且 $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$.

称 X 上非负 Borel 测度 μ 满足双倍条件是指存在常数 $A>0$，使得

$$0<\mu(B(x,2r))\leqslant A\mu(B(x,r))<\infty$$

对于一切 $x\in X$ 及 $r>0$ 成立，其中 $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$.

称 (X,d,μ) 为齐型空间，是指 X 是一拓扑空间，其拓扑结构由 d 决定. 球族 $\{B(x,r)\}_{r>0}$ 组成 $x\in X$ 的一个开邻域基，且在 X 上给定一满足双倍条件的 Borel 测度 μ.

本文假定齐型空间 (X,d,μ) 满足连续函数全体在 $L^1(X,d\mu)$ 中稠.

注　后面亦常用 $|B(x,r)|$ 表示 $\mu(B(x,r))$.

(2)　若 f 局部可积，则 f 的 H－L 极大函数和中心极大函数分别定义为

$$Mf(x)\overset{\triangle}{=}\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B|f(y)|d\mu(y),$$

$$\widetilde{M}f(x)\overset{\triangle}{=}\sup\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|d\mu(y).$$

显然有 $\widetilde{M}f(x)\leqslant Mf(x)\leqslant c\widetilde{M}f(x)$，其中 $c=A_{4k^2}$.

(3)　若 f 局部可积，且存在常数 $c_0>0$，使 $\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|d\mu\leqslant c_0<\infty$. 对于一切球 B 成立，则称 f 为 X 上有界平均振动函数，记这样的函数全体为 BMO(X). 若 $f\in$BMO(X)，定义其 BMO 范数为 $\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}\overset{\triangle}{=}\sup_{B\subset X}\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_B|d\mu\leqslant c_0<\infty$，显然有

$$\mathrm{BMO}(X)=\{f\in L^1_{\mathrm{Loc}}(X): f^{\#}\in L^\infty(X)\}.$$

* 1992年9月4日收到. 94年5月1日收到修改稿.

二　基本引理

引理（覆盖引理）　设齐型空间(X,d,μ)中所有开球都是开集，设函数f非负可积，则对于每个$\lambda\geqslant f_X$（若$\mu(X)=\infty$，$f_X=0$），存在一个非交球列$\{B_i\}=\{B(x_i,r_i)\}$，使得：若$\widetilde{B}_i=B(x_i,cr_i)$（$c$是[1]中引理2.1中的常数），有

$$f_{\widetilde{B}_i}\leqslant\lambda<f_{B_i}\quad i=1,2,\cdots,$$

且$f_B\leqslant\lambda$. 其中B是任一中心大$x\in(X\setminus\bigcup\widetilde{B}_i)$的球$B=B(x,r)$.

证明参见[1].

三　主要结果及其证明

定理　设齐型空间(X,d,μ)中所有开球都是开集，且连续函数全体在$L^1(X)$中稠，则$Mf\in\mathrm{BMO}(X)$且

$$\|Mf\|_{\mathrm{BMO}(X)}\leqslant c\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)},\tag{3.1}$$

其中c与f无关.

证明　(1) 先证明$F(x)=Mf(x)\in L^1_{\mathrm{Loc}}(X)$. 因为$Mf=M|f|$，故无妨设$f$非负.

任意给定球$B=B(x_0,r_0)$，$\widetilde{B}=cB$（c为引理中的常数）. 对于$x\in B$，令

$$F_1(x)\overset{\triangle}{=}\sup\{f_{\overline{B}}:\overline{B}\subset\widetilde{B},x\in\overline{B}\},$$

$$F_2(x)\overset{\triangle}{=}\sup\{f_{\overline{B}}:x\in\overline{B},\overline{B}\cap(\widetilde{B})^c\neq\varnothing\},$$

其中$f_{\overline{B}}=\dfrac{1}{|\overline{B}|}\displaystyle\int_{\overline{B}}fd\mu$. 记$E_1\overset{\triangle}{=}\{x\in B:F_1(x)\geqslant F_2(x)\}$. 显然，在$B$上，$F(x)=\max\{F_1(x),F_2(x)\}$，$\forall x\in B$. 因为$f\in L^1_{\mathrm{Loc}}(X)$，取定义$\geqslant f_{\widetilde{B}}$，则由引理，得一非交球列$\{B_k\}$，使得

$$f_{\widetilde{B}_k}\leqslant\alpha<f_{B_k},\tag{3.2}$$

$$|\widetilde{B}_k|\leqslant A_c|B_k|\ (c\text{为引理中的常数}),\tag{3.3}$$

$$f(x)\leqslant\alpha,\quad \text{a.e.}\ x\in(\widetilde{B}\setminus\bigcup_k\widetilde{B}_k).\tag{3.4}$$

现在定义

$$V_1=\widetilde{B}_1\setminus\bigcup_{n=2}^{\infty}B_n,\quad V_k=\widetilde{B}_k\setminus((\bigcup_{n=1}^{k-1}V_n)\cup(\bigcup_{n=k+1}^{\infty}B_n)),$$

$$b=\sum_k(f-f_{B_k})X_{V_k},\quad g=\sum_k(f_{\widetilde{B}_k}X_{V_k})+fX_{(\widetilde{B}\setminus\bigcup_k\widetilde{B}_k)}.$$

可以证明$B_k\subset V_k\subset\widetilde{V}_k$，$V_i\cap V_j=\varnothing(i\neq j\text{时})$，且$\bigcup_kV_k=\bigcup_k\widetilde{B}_k$，因而$\|g\|_\infty\leqslant\alpha$.

又因为$b\in L^2(X)$，且$\{B_k\}$非交，由John-Nirenberg定理，得

$$\|b\|_{L^2(X)}=(\sum_k\int_{V_k}|f-f_{\widetilde{B}_k}|^2d\mu)^{\frac{1}{2}}\leqslant(\sum_k\int_{\widetilde{B}_k}|f-f_{\widetilde{B}_k}|^2d\mu)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant c\|f\|_{\mathrm{BMO}(X)}|B|^{\frac{1}{2}},$$

又因为$f=b+g$，$\forall x\in\widetilde{B}$，故$F_1\leqslant M(fX_{\widetilde{B}})\leqslant Mb+Mg$. 所以，

$$\int_{E_1} F_1(x)d\mu(x) \leqslant |E_1|^{\frac{1}{2}} \| Mb \|_{L^2(X)} + |E_1| \| Mg \|_{L^\infty(X)}$$
$$\leqslant c|B| \| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} + c|B|\alpha.$$

即

$$\int_{E_1} F_1(x)d\mu(x) \leqslant c|B|(\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} + \alpha). \tag{3.5}$$

(这是由极大算子的强(2.2)型和强(∞,∞)型及上述的 $\| g \|_{L^\infty(X)}$和 $\| b \|_{L^2(X)}$的估计式). 又当 $\overline{B}\cap(\widetilde{B})^c\neq\varnothing$时,$b\overline{B}\supset B$,$b=k(\frac{4k^3}{c-k}+1)$,其中 c 为引理中的常数,$c>k$ 显然. 并且由

$$\frac{1}{|\overline{B}|}\int_{\overline{B}}|f-f_{b\overline{B}}|d\mu \leqslant \frac{1}{|\overline{B}|}\int_{b\overline{B}}|f-f_{b\overline{B}}|d\mu \leqslant c\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)},$$

故 $f_{\overline{B}}=\frac{1}{|\overline{B}|}\int_{\overline{B}}fd\mu \leqslant \frac{1}{|\overline{B}|}\int_{\overline{B}}|f-f_{b\overline{B}}|d\mu + f_{b\overline{B}} \leqslant c\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} + f_{b\overline{B}}$. 所以

$$F_2(x)=\sup\{f_{\overline{B}}: x\in\overline{B}, \overline{B}\cap(\widetilde{B})^c\neq\varnothing\} \leqslant \sup\{f_{b\overline{B}}: x\in\overline{B}, \overline{B}\cap(\widetilde{B})^c\neq\varnothing\}$$
$$+ c\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} \leqslant \inf_{x'\in B} Mf(x') + c\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} \quad (\text{因为 } b\overline{B}\supset B).$$

即

$$F_2(x) \leqslant \inf_{x'\in B} Mf(x') + c\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)}. \tag{3.6}$$

若 $Mf(x)\not\equiv\infty$,则存在 $x^*\in X$,使得 $Mf(x^*)<\infty$,当 $x^*\in B$ 时,由(3.5),(3.6),Mf 在 B 上可积;当 $x^*\notin B$ 时,作球 $B'\supset\{x^*\}\cup B$,只要令 $B'=B(x_0,r_0+d(x_0,x^*))$即可. 由球 B 的任意性,(3.5),(3.6)式对于 B'也成立,故 Mf 在 B'上可积,因此,$Mf\in L^1_{\mathrm{Loc}}(X)$(因为 $B\subset B'$).

(2) 现证(3.1)式成立.

无妨设 f 为非负 BMO 函数. 令 $F=Mf$,需证

$$\frac{1}{|B|}\int_B |F(x)-F_B|d\mu(x) \leqslant c\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} \tag{3.7}$$

对于任意球 B 成立.

固定球 $B=B(x_0,r_0)$. 设 $cB=B(x_0,cr_0)$,c 为引理中的常数. 若令

$$A=\{x\in B: F(x)>F_B\}, \quad A_1=\{x\in A: F_1(x)>F_2(x)\},$$

且 $A_2=A\backslash A_1$,则

$$\frac{1}{|B|}\int_B |F(x)-F_B|d\mu(x) = \frac{2}{|B|}\sum_{i=1}^{2}\int_{A_i}(F_i(x)-F_B)d\mu(x).$$

若能证明:对于 $i=1,2$,

$$\int_{A_i}(F_i(x)-F_B)d\mu(x) \leqslant c|B|\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)}, \tag{3.8}$$

则(3.7)成立.

(Ⅰ) $i=1$ 时,因为 $f_{\widetilde{B}}\leqslant F(x)(\forall x\in B, \widetilde{B}=cB)$,则 $f_{\widetilde{B}}\leqslant F_B$. 利用引理,关于($fX_{\widetilde{B}}$,$\widetilde{B}$,$F_B$)作 $c-z$ 分解. 从而得到一非交球列$\{B_k\}$,且$\{B_k\}$满足(3.2),(3.3)及(3.4)式. 现定义 V_n 及 b,g 如前,同前类似有 $\int_{A_1}F_1(x)d\mu(x) \leqslant c|B|^{\frac{1}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)} + A_1F_B$. 从而

$$\int_{A_1}(F_1(x)-F_B)d\mu(x) \leqslant c|B|\| f \|_{\mathrm{BMO}(X)}.$$

即证明了(3.8)对于 $i=1$ 时成立.

(Ⅱ) $i=2$ 时,固定 $x^*\in A_2$,设 P 是任一包含 x^* 且与 $(\widetilde{B})^c$ 相交非空的球,记 $B=B(x_0,r_0)$,$\widetilde{B}=B(x_0,cr_0)$,$P=B(x',r)$. 设 $y\in P\cap(\widetilde{B})^c$,则由三角不等式得

$$cr_0\leqslant d(x_0,y)\leqslant k(d(x_0,x^*)+d(x^*,y))\leqslant k(r_0+2kr).$$

从而 $r>\frac{c-k}{2k^2}r_0$. 当 $m\in B$ 时,

$$d(m,x')\leqslant k(d(m,x^*)+d(x^*,x'))<k(\frac{4k^3}{c-k}+1)=br,$$

故 $B=B(x_0,r_0)\subset B(x',br)$,所以 $f_{B(x',br)}\leqslant F(x)$,$\forall\ x\in B$,从而有 $f_{B(x',br)}\leqslant F_B$,于是有

$$f_P-F_B\leqslant f_P-f_{bP}\leqslant A_b\|f\|_{BMO(X)}. \qquad (*)$$

在(*)式两边对所有这样的球 P 取上确界得 $F_2(x^*)<F_B\leqslant c\|f\|_{BMO(X)}$,$(x^*\in A_2)$. 由于(3.9)成立,定理获证.

附注 本文推广了[2]中的结果.

参 考 文 献

[1] Hugo Aimar, *Singular integral and approximate identities on spaces of homogenous type*, Trans Amer. Math. Soc., Vol. 292(1985), 135—163.

[2] C.B. Ronald, A. Devore and Robert Sharpley, *Weak-L^∞ and BMO*, Annals of Math, 13(1981), 601—611.

[3] J. Gornett and P. Jones, *The distance in BMO to L^∞*, Ann. Math., 108(1978), 373—393.

[4] F. John and Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure. Appl. Math., 14 (1961), 415—426.

[5] 杨乐、龙瑞麟,齐型空间上的BMO函数,中国科学,4(1984).

The Boundedness of BMO Concerning H-L Maximal Operator on Spaces of Homogeneous Type

Wang Jie

(Dept. of Math., Beijing Univ., 100871)

Abstract

In this paper, the boundedness of the bounded mean oscillation concerning Hardy-Littlewood maximal operator on spaces of homogeneous type on which all open balls are open sets and all continuous functions are dense in L^1 is resolved completely.

Keywords space of homogeneous type, H-L maximal operator, BMO.