第15卷第4期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

齐型空间上算子的加权内插及其应用*

刘 岚 喆
(长沙电力学院数学系，410077)

摘 要 本文在齐型空间上建立了算子的加权情形下的实内插定理，运用该结果，立即可推导出齐型空间上 Calderón-Zygmund 算子的加权 L^p 有界性($p>1$)和弱 L^1 有界性.

关键词 齐型空间，C_1 权，算子内插，Calderón-Zygmund 算子.
分类号 AMS(1991) 42B10/CCL O177.1

算子的插值理论具有很广泛的应用，特别地，用实内插的办法来证明算子的有界性是很有效的，其中一个基本结果是：

定理A 设线性算子 T 在 $L^{p_0}(R^n)$ 上有界，$p_0>1$，且对支集含于球 $B(x_0,r)$ 的函数 f，如 $\int f dx=0$，有

$$\int_{|x-x_0|>2r}|Tf(x)|dx\leqslant C\|f\|_{L^1(R^n)},$$

则 $|\{x\in R^n:|Tf(x)|>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(R^n)}$，即 T 为弱 L^1 有界的，进而 T 在 $L^p(R^n)$ 上有界($1<p\leqslant p_0$)，即

$$\|Tf\|_{L^p(R^n)}\leqslant C\|f\|_{L^p(R^n)},\quad 1<p\leqslant p_0.$$

本文的主要目的在于推广该结果到齐型空间上的加权情形，做为其应用，推导出了齐型空间上的 θ-Calderón-Zygmund 算子的加权 L^p 有界性. 先给出几个记号.

设 (X,d,μ) 为 Coifman-Weiss[1] 意义下的齐型空间，记 $X^+=X\times R^+=\{(x,t):x\in X,t\geqslant 0\}$，球 $B(x,r)=\{y\in X:d(x,y)<r\}$，$\widetilde{B}(x,r)=\{(y,t)\in X^+:y\in B(x,r),0\leqslant t\leqslant r\}$.

记 ω 为 X 上的权函数，β 为 X^+ 上的正 Borel 测度，定义权函数类：$C_1=\{(\omega,\beta):\sup_{x\in B}\frac{\beta(\widetilde{B})}{\mu(B)}\leqslant C\omega(x)$，且 $\sup_{x\in B}\frac{\omega(B)}{\mu(B)}\leqslant C\omega(x)\}$.

本文恒假设具有有界支集的连续函数在 $L^p(X,d\mu)$ 中稠密，$1\leqslant p<\infty$.

引理 设 $(\omega,\beta)\in C_1$，f 为具有有界支集的正函数，且 $f\in L^1(X,\omega d\mu)$，则对 $\lambda>0$，存在不交球列 $\{B_n=B(x_n,r_n)\}_{n=1}^{\infty}$ 和不交集列 $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使

(1) $f(x)\leqslant\lambda$, a.e., $x\notin\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_n$,

* 1993年1月12日收到. 高校科研基金资助课题.

(2) $\lambda\leqslant\frac{1}{\mu(B_n)}\int_{B_n}fd\mu\leqslant C\lambda$ 且 $C\lambda\leqslant\frac{1}{\mu(Q_n)}\int_{Q_n}fd\mu\leqslant C\lambda, n=1,2,\cdots$;

(3) $B_n\subseteq Q_n\subseteq KB_n$, $n=1,2,\cdots$.

该引理的证明利用 Vitali 复盖引理[1],也见[2].

本文中,我们建立了

定理B 设 E,F 为 Banach 空间,T 为将 X 上的 E-值函数映为 X^+上的 F-值函数的线性算子,$(\omega,\beta)\in C_1$,并且

(i) 存在 p_0 使 T 为 $L_E^{p_0}(X,\omega d\mu)$到弱-$L_F^{p_0}(X_n^+,d\beta)$有界的($1<p_0<\infty$)或 T 为 $L_E^\infty(X,\omega d\mu)$到 $L_F^\infty(X^+,d\beta)$有界的($p_0=\infty$);

(ii) 对具有支集含于球 $B(x_0,r)$内的 E-值函数 f,当 $\int fd\mu=0$ 时有

$$\int_{d(x,x_0)+t>2r}\|Tf(x,t)\|_Fd\beta(x,t)\leqslant C\int_X\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x).$$

则

(1) T 为 $L_E^1(X,\omega d\mu)$到弱 $L_F^1(X^+,d\beta)$有界的;

(2) T 为 $L_E^p(X,\omega d\mu)$到 $L_F^p(X^+,d\beta)$有界的,$1<p<p_0$.

证明 只须对有有界支集的函数证明定理的结论.

(1) 设 $f\in L_E^1(X,\omega d\mu)$且 f 具有有界支集,对 $\lambda>0$,令$\{B_n\}$和$\{Q_n\}$为引理中与 f 和 λ 相联的球列和集列,分解 $f=g+h$,其中

$$g(x)=\begin{cases}f(x), & x\notin\bigcup_{n=1}^\infty Q_n,\\ \frac{1}{\mu(Q_n)}\int_{Q_n}fd\mu, & x\in Q_n, n=1,2,\cdots,\end{cases}$$

$$h(x)=f(x)-g(x)=\sum_{n=1}^\infty\Big(f(x)-\frac{1}{\mu(Q_n)}\int_{Q_n}fd\mu\Big)\chi_{Q_n}(x)=\sum_{n=1}^\infty h_n(x),$$

则 $\|g(x)\|_E\leqslant C\lambda$, a.e.,且 $\|g\|_{L_E^1(X,\omega d\mu)}\leqslant C\|f\|_{L_E^1(X,\omega d\mu)}$, $\|h\|_{L_E^1(X,\omega d\mu)}\leqslant C\|f\|_{L_E^1(X,\omega d\mu)}$. 由于 $\beta(\{x,t)\in X^+:\|Tf(x;t)\|_F>\lambda\})\leqslant\beta(\{x,t)\in X^+:\|Tg(x,t)\|_F>\frac{\lambda}{2}\})+\beta(\{(x,t)\in X^+:\|Th(x,t)\|_F>\frac{\lambda}{2}\})$,故当 $p_0=\infty$时,由 $\|Tg\|_{L_F^\infty(X,\omega d\beta)}\leqslant C\|g\|_{L_F^\infty(X,\omega d\mu)}\leqslant C\lambda$ 得

$$\beta(\{(x,t)\in X^+:\|Tf(x,t)\|_F>2C\lambda\})\leqslant\beta(\{x,t)\in X^+:\|Th(x,t)\|_F>C\lambda\}),$$

当 $p_0<\infty$时

$$\beta(\{(x,t)\in X^+:\|Tg(x,t)\|_F>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda^{p_0}}\int_X\|g(x)\|_E^{p_0}\omega(x)d\mu(x)$$
$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_X\|g(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_X\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)$$

因此剩下只须证明

$$\beta(\{(x,t)\in X^+:\|Th(x,t)\|_F>\lambda\})\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_X\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x).$$

令 $\widetilde{\Omega}=\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{2KB_n})$，则

$\beta(\{(x,t)\in X^+:\|Th(x,t)\|_F>\lambda\})\leqslant\beta(\widetilde{\Omega})+\beta(\{(x,t)\notin\widetilde{\Omega}:\|Th(x,t)\|_F>\lambda\})$，

而

$$\beta(\widetilde{\Omega})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\beta(\widetilde{2KB_n})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta(\widetilde{2KB_n})}{\lambda}\frac{1}{\mu(B_n)}\int_{B_n}\|f(x)\|_E d\mu(x)$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{B_n}\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_X\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x),$$

$$\beta(\{(x,t)\notin\widetilde{\Omega}:\|Th(x,t)\|_F>\lambda\})\leqslant\frac{1}{\lambda}\int_{\widetilde{\Omega}^c}\|Th(x,t)\|_F d\beta(x,t)$$

$$\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{(\widetilde{2KB_n})^c}\|Th_n(x,t)\|_F d\beta(x,t).$$

注意到当$(x,t)\notin 2KB_n$时，或者 $x\notin 2KB_n$ 或者 $t>2Kr_n$，即总有 $d(x,x_n)+t>2Kr_n$ 且 h_n 的支集含于 $Q_n\subseteq KB_n$ 内及 $\int h_n d\mu=0$，故由条件(ii)得：

$$\beta(\{(x,t)\notin\widetilde{\Omega}:\|Th(x,t)\|_F>\lambda\})\leqslant\frac{1}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{d(x,x_n)+t<2Kr_n}\|Th_n(x,t)\|_F d\beta(x,t)$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\int_X\|h_n(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)=\frac{C}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}\int_n\|h(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)$$

$$\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_X\|h(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_X\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x).$$

因此结论(1)得证，而结论(2)可由插值定理和结论(1)推得. 证毕.

推论 设 E,F 为 Banach 空间，记 $L(E,F)$为从 E 到 F 的有界线性算子全体，令 T 为将 X 上的 E-值函数映为 X^+上的 F-值函数的线性算子，$(\omega,\beta)\in C_1$，并且

(i) 存在 p_0，$1<p_0\leqslant\infty$使 T 为从 $L_E^{p_0}(X,\omega d\mu)$到 $L_F^{p_0}(X^+,d\beta)$有界的；

(ii) 存在 $X\times X\times R^+\setminus\{(x,x,t):x\in X,t\geqslant 0\}$到 $L(E,F)$的函数 $K(x,y,t)$使对$(x,t)\in X^+$和球 B，当$(x,t)\notin\widetilde{2B}$时，$\int\|K(x,y,t)\|d\mu(y)<\infty$，对具有支集含于 B 的 $f\in L_E^{\infty}(X,\omega d\mu)$有 $Tf(x,t)=\int_X K(x,y,t)f(y)d\mu(y)$，$(x,t)\notin 2\widetilde{B}$，并且当 $2d(y,y_0)<d(x,y_0)+t$ 时，存在函数 θ，$R^+\to R^+$，θ 为非减且 $\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}dt<\infty$，$\theta(2t)\leqslant C\theta(t)$ 使

$$\|K(x,y,t)-K(x,y_0,t)\|\leqslant C\theta\left(\frac{d(y,y_0)}{d(x,y_0)+t}\right)\frac{1}{\mu(B(y_0,d(x,y_0)+t))};$$

则

(1) T 为 $L_E^1(X,\omega d\mu)$到弱-$L_F^1(X^+,d\beta)$有界的，

(2) T 为 $L_E^p(X,\omega d\mu)$到 $L_F^p(X^+,d\beta)$有界的，$1<p\leqslant p_0$.

证明 只须验证定理 B 的条件(ii)满足，即对于具有含于球 $B(y_0,r)$的支集的 E-值函数 f，当 $\int fd\mu=0$ 时 $\int_{d(x,y_0)+t>2r}\|Tf(x,t)\|_F d\beta(x,t)\leqslant C\int_X\|f(x)\|_E\omega(x)d\mu(x)$.

事实上，当 $y\in B(y_0,r)$ 时，$2d(y,y_0)\leqslant 2r<d(x,y_0)+t$，又令 $\widetilde{E}_n=\{(x,t)\in X^+:2^{n-1}r<d(x,y_0)+t\leqslant 2^n r\}$，$\widetilde{B}_n=\{(x,t)\in X^+:d(x,y_0)+t\leqslant 2^n r\}$，$n=1,2,\cdots$，并且注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\theta(\frac{1}{2^n})$ 等价于 $\int_0^1\frac{\theta(t)}{t}dt<\infty$，得

$$
\begin{aligned}
&\int_{d(x,y_0)+t>2r}\|Tf(x,t)\|_F d\beta(x,t)\\
&\leqslant\int_{d(x,y_0)+t>2r}d\beta(x,t)\int_{B(y_0,r)}\|K(x,y,t)-K(x,y_0,t)\|\ \|f(y)\|_E d\mu(y)\\
&\leqslant\int_{d(x,y_0)+t>2r}d\beta(x,t)\int_{B(y_0,r)}\theta(\frac{d(y_0,y)}{d(x,y_0)+t})\frac{1}{\mu(B(y_0,d(x,y_0)+t))}\|f(y)\|_E d\mu(y)\\
&\leqslant\int_{B(y_0,r)}\|f(y)\|_E d\mu(y)\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\widetilde{E}_n}\theta(\frac{r}{2^{n-1}r})\frac{1}{\mu(B(y_0,2^{n-1}r))}d\beta(x,t)\\
&\leqslant C\int_{B(y_0,r)}\|f(y)\|_E\sum_{n=1}^{\infty}\theta(\frac{1}{2^n})\sup_{y\in B_n}\frac{\beta(2B_n)}{\mu(\widetilde{2B_n})}d\mu(y)\leqslant C\int_X\|f(y)\|_E\omega(y)d\mu(y).
\end{aligned}
$$

证毕.

值得指出：定理 B 和推论均为新结果，它们包含了文献[3]和[2]的主要结果.

参 考 文 献

[1] R. R. Coifman and G. Weiss, *Extension of Hardy spaces and their use in analysis*, Bull. Amer. Math. Soc., 83(1977), 569—645.

[2] F. J. Ruiz and J. L. Torrea, *Vector-valued Calderón-Zygmund theory and Carleson measure on spaces of homogeneous nature*, Studia Math., 88(1988), 221—243.

[3] A. Benedek, A. P. Calderón and R. Panzone, *Convolution operators on Banach spaces valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA., 48(1962), 356—365.

Weighted Interpolation of Operators on Homogeneous Type Spaces with Application

Liu Lanzhe

(Dept. of Math., Changsha Normal Institute of Water Resources and Electric Power, 410077)

Abstract

The weighted interpolation theorem of operators on homogeneous type spaces is proved and is used to show the weighted boundedness of $L^p(p>1)$ and weak L^1 for Calderón-Zygmund operator on homogeneous type spaces.

Keywords homogeneous type space, interpolation of operator, Calderón-Zygmund operator, C_1 weight.