第15卷第4期 1995年11月 数学研究与评论 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Vol. 15 No. 4 Nov. 1995

相依序列加权和的收敛性*

杨 善 朝
(广西师范大学数学系，桂林 541004)

摘 要 本文在相依序列下考虑加权和的 a.s. 收敛性和完全收敛性. 所得结论推广并改进了[1]、[2]中有关结论.

关键词 相依序列，加权和，a.s. 收敛，完全收敛.

分类号 AMS(1991) 60F15/CCL O211.4

一 引 言

设$\{X_i;i\geqslant 1\}$为随机变量序列，$\{a_{ni};1\leqslant i\leqslant K_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$为加权系数序列. 考虑如下加权和

$$T_n=\sum_{i=1}^{K_n}a_{ni}X_i. \tag{1.1}$$

在$\{X_i;i\geqslant 1\}$为独立同分布情形，[1]给出$T_n\to 0$, a.s. 的一些充分条件(即[1]中定理 2.1 和定理 2.2)，[2]对$K_n=n^\lambda$(其中$1\leqslant\lambda<\infty$)给出T_n完全收敛的一个充分条件(即[2]中定理 7). 本文将上述提及的定理推广到相依序列情形，并弱化了他们的条件.

记$\mathscr{F}_m^n=\sigma(X_i;m\leqslant i<n)$. 本文将使用如下混合系数

$$\psi(n)=\sup_m\sup_{\{A\in\mathscr{F}_1^m,B\in\mathscr{F}_{m+n}^\infty,P(A)P(B)\neq 0\}}\left|\frac{P(AB)}{P(A)P(B)}-1\right|, \tag{1.2}$$

$$\varphi(n)=\sup_m\sup_{\{A\in\mathscr{F}_1^m,B\in\mathscr{F}_{m+n}^\infty,P(A)\neq 0\}}|P(B|A)-P(B)|. \tag{1.3}$$

若$\psi(n)\downarrow 0$(或$\varphi(n)\downarrow 0$)当$n\to\infty$，则称$\{X_i;i\geqslant 1\}$为ψ-混合的(或φ-混合的). 另外，如果$\forall\ t>0$，有

$$\sup_i P(|X_i|>t)\leqslant P(|X|>t), \tag{1.4}$$

则称$\{X_i;i\geqslant 1\}$被 r.v. X 所界.

本文约定：记号“$\ll$”表示通常的大“O”，I_A表示示性函数.

二 定理与证明

* 1992年12月17日收到.

为了给出本文的结论，我们首先给出两个引理.

引理 1 设$\{X_i;i\geqslant1\}$为ψ-混合且$\sum_{i=1}^{\infty}\psi(i)<\infty$，或者为$\varphi$-混合且$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi^{1/2}(i)<\infty$. 如果$EX_i=0,E|X_i|^q<\infty$(其中$q\geqslant2$)，$i=1,2,\cdots$. 则存在常数$C>0$使

$$E|\sum_{i=1}^{n}X_i|^q\leqslant C\{\sum_{i=1}^{n}E|X_i|^q+(\sum_{i=1}^{n}EX_i^2)^{q/2}\}. \tag{2.1}$$

证明 先考虑φ-混合. 由[3]中 p170 引理 1，有

$$\begin{aligned}E(\sum_{i=1}^{n}X_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}EX_i^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}E(X_iX_j)\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}EX_i^2+4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\varphi^{1/2}(j-i)(EX_j^2)^{1/2}(EX_j^2)^{1/2}\\&\leqslant(1+4\sum_{k=1}^{n}\varphi^{1/2}(k))\sum_{i=1}^{n}EX_i^2.\end{aligned} \tag{2.2}$$

由此及[4]中推论 2.1 即得(2.1). 对ψ-混合，利用[5]中引理 1.2 同理可证. 证毕.

引理 2 设$\{X_i;i\geqslant1\}$为φ-混合，$EX_i=0,|X_i|\leqslant d$，a.s. $i=1,2,\cdots$，正整数序列$K_n\uparrow\infty$(当$n\to\infty$). 则$\forall\ \varepsilon>0$，

$$P(|\sum_{i=1}^{K_n}X_i|>\varepsilon)\leqslant2eC_1\exp\{-t\varepsilon+C_2t^2\Delta_2\}, \tag{2.3}$$

其中$\Delta_2=\sum_{i=1}^{K_n}EX_i^2$，$C_1=\exp\{eK_n\varphi(m)/m\}$，$C_2=4(1+4\sum_{i=1}^{m}\varphi^{1/2}(i))$，$t>0$，$m$为正整数且$1\leqslant m\leqslant K_n$，$tmd\leqslant1/4$.

证明 给定$K_n\geqslant1$. 因为$1\leqslant m\leqslant K_n$，所以存在非负整数$l\leqslant K_n$，使

$$2lm\leqslant K_n<2(l+1)m. \tag{2.4}$$

当$1\leqslant i\leqslant K_n$时，令$Y_i=X_i$；当$i>K_n$时，令$Y_i=0$. 对$\{Y_i;i\geqslant1\}$构造随机变量序列

$$\begin{aligned}&\xi_1=Y_1+\cdots+Y_m, &&\eta_1=Y_{m+1}+\cdots+Y_{2m},\\&\xi_2=Y_{2m+1}+\cdots+Y_{3m}, &&\eta_2=Y_{3m+1}+\cdots+Y_{4m},\\&\qquad\cdots\cdots &&\qquad\cdots\cdots\\&\xi_l=Y_{2(l-1)m+1}+\cdots+Y_{(2l-1)m}, &&\eta_l=Y_{(2l-1)m+1}+\cdots+Y_{2lm},\end{aligned}$$

$$\xi_{l+1}=\begin{cases}0, & \text{当 } 2lm\geqslant K_n,\\ Y_{2lm+1}+\cdots+Y_{K_n}, & \text{当 } 2lm<K_n.\end{cases}$$

显然

$$\sum_{i=1}^{K_n}X_i=\sum_{i=1}^{l+1}\xi_i+\sum_{i=1}^{l}\eta_i. \tag{2.5}$$

由(2.4)有$0\leqslant K_n-2lm<2m$. 从而，$|t\xi_{l+1}|\leqslant2mtd\leqslant1/2$，a.s.，因此，$\forall\ \varepsilon>0$，有

$$\begin{aligned}P(\sum_{i=1}^{K_n}X_i>\varepsilon)&\leqslant e^{-t\varepsilon}E\exp\{t\sum_{i=1}^{l+1}\xi_i+t\sum_{i=1}^{l}\eta_i\}\leqslant e^{-t\varepsilon+1/2}E\exp\{t\sum_{i=1}^{l}\xi_i+t\sum_{i=1}^{l}\eta_i\}\\&\leqslant e^{-t\varepsilon+1/2}(E\exp\{2t\sum_{i=1}^{l}\xi_i\})^{1/2}(E\exp\{2t\sum_{i=1}^{l}\eta_i\})^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

记 $\Delta_2(i) = \sum_{j=(i-1)m+1}^{im} EX_j^2, i = 1,2,\cdots,2l$. 由(2.2)有

$$E\xi_i^2 \leqslant (1 + 4\sum_{k=1}^{m}\varphi^{1/2}(k))\Delta_2(2i-1).$$

又 $E\xi_i=0, |2l\xi_i|\leqslant 2lmd\leqslant 1/2$, a.s. $(i=1,2,\cdots,l)$. 因此

$$Ee^{2l\xi_i} \leqslant e^{4l^2E\xi_i^2} \leqslant \exp\{C_2l^2\Delta_2(2i-1)\}, \tag{2.7}$$

从而,由[3]中 p171(20,28)式,并注意(2.7)和(2.4),有

$$\begin{aligned} E\exp\{2l\sum_{i=1}^{l}\xi_i\} &= E(\exp\{2l\sum_{i=1}^{l-1}\xi_i\}\cdot\exp\{2l\xi_l\}) \leqslant (Ee^{2l\xi_l} + 2\sqrt{e}\varphi(m))E\exp\{2l\sum_{i=1}^{l-1}\xi_i\} \\ &\leqslant (1 + 2\sqrt{e}\varphi(m))\exp\{C_2l^2\Delta_2(2l-1)\}E\exp\{2l\sum_{i=1}^{l-1}\xi_i\} \leqslant \cdots \\ &\leqslant (1 + 2\sqrt{e}\varphi(m))^l\exp\{C_2l^2\sum_{i=1}^{l}\Delta_2(2i-1)\} \leqslant \exp\{2\sqrt{e}l\varphi(m)\}\exp\{C_2l^2\Delta_2\} \\ &\leqslant \exp\{\sqrt{e}K_n\varphi(m)/m\}\cdot\exp\{C_2l^2\Delta_2\}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

同理

$$E\exp\{2l\sum_{i=1}^{l}\eta_i\} \leqslant \exp\{\sqrt{e}K_n\varphi(m)/m\}\cdot\exp\{C_2l^2\Delta_2\}. \tag{2.9}$$

由(2.6),(2.8),(2.9)有

$$P(\sum_{i=1}^{K_n}X_i > \varepsilon) \leqslant \sqrt{e}C_1\exp\{-l\varepsilon + C_2l^2\Delta_2\},$$

从而(2.3)成立. 证毕.

记 $A_n = \sum_{i=1}^{K_n}a_{ni}^2$.

定理 1 设$\{X_i;i\geqslant 1\}$为 ψ-混合,均值为零且被 r.v. X 所界. $\sum_{i=1}^{\infty}\psi(i) < \infty$. 如果$E|X|^p < \infty$(其中 $p\geqslant 2$),且存在常数 $\alpha>0$ 和 $B>0$ 使

$$A_n \leqslant Bn^{-\alpha}, \quad |a_{ni}| \leqslant Bi^{-1/p}, i = 1,2,\cdots,K_n, n \geqslant 1. \tag{2.10}$$

则 $T_n\to 0$, a.s.

证明 由 a.s. 收敛准则(见[6]p23 定理 5.2)知:$T_n\to 0$, a.s. 等价于:$\forall\ \varepsilon>0$ 有

$$\lim_{m\to\infty}P(\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|T_n| > 6\varepsilon\}). = 0. \tag{2.11}$$

给定 $\varepsilon>0$,令

$$\left.\begin{aligned} &X_{ni}(1) = X_iI_{(|a_{ni}X_i|\leqslant n^{-\rho})}, \quad X_{ni}(2) = X_iI_{(n^{-\rho}<|a_{ni}X_i|<\varepsilon/N)}, \\ &X_{in}(3) = X_iI_{(|a_{ni}X_i|\geqslant\varepsilon/N)}, \quad \overline{X}_{ni}(j) = X_{ni}(j) - EX_{ni}(j), \\ &T_n(j) = \sum_{i=1}^{K_n}a_{ni}\overline{X}_{nj}(j), \quad Q_m(j) = P(\bigcup_{n=m}^{\infty}\{|T_n(j)| > 2\varepsilon\}), \\ &\qquad j = 1,2,3, \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

其中 $\rho<0, N>0$ 为整数,且均为待定常数. 显然,为证(2.11),只需证$\lim_{m\to\infty}Q_m(j)=0$ $(j=1,2,$

3).

（一） 首先证$\lim\limits_{m\to\infty}Q_m(1)=0$. 设 $M>P$，由引理 1 有

$$P(|T_n(1)|>2\varepsilon)\ll\sum_{i=1}^{K_n}E|a_{ni}\overline{X}_{ni}(1)|^M+(\sum_{i=1}^{K_n}E(a_{ni}\overline{X}_{ni}(1))^2)^{M/2}\ll A_n\cdot n^{-\rho(M-2)}+A_n^{M/2}$$
$$\ll n^{-\rho(M-2)}+n^{-\alpha M/2}. \tag{2.13}$$

取 M 充分大即有 $\sum\limits_n P(|T_n(1)|>2\varepsilon)<\infty$. 从而

$$Q_m(1)\leqslant\sum_{n=m}^{\infty}P(|T_n(1)|>2\varepsilon)\to 0\quad(\text{当 } m\to\infty).$$

（二） 其次证$\lim\limits_{m\to\infty}Q_m(2)=0$. 记 $X_{ni}(\rho)=X_iI_{(|a_{ni}X_i|>n^{-\rho})}$，$T_n(\rho)=\sum\limits_{i=1}^{K_n}a_{ni}X_{ni}(\rho)$，$T'_n(2)=\sum\limits_{i=1}^{K_n}a_{ni}X_{ni}(2)$，$B_i=\{|a_{ni}X_i|>n^{-\rho}\}$. 则

$$|ET_n(\rho)|\leqslant\sum_{i=1}^{K_n}E|a_{ni}X_{ni}(\rho)|\leqslant\sum_{i=1}^{K_n}E(a_{ni}X_{ni}(\rho))^2n^{\rho}$$
$$\ll n^{\rho-\alpha}\to 0\quad(\text{当 }\rho\text{ 充分小且 } n\to\infty). \tag{2.14}$$

$$P(|T'_n(2)|>\varepsilon)\leqslant P(\sum_{i=1}^{K_n}|a_{ni}X_{ni}(2)|>\varepsilon)\leqslant P(\text{至少有 } N \text{ 个下标 } i \text{ 使 } |a_{ni}X_i|>n^{-\rho})$$
$$\leqslant\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant K_n}P(B_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_N}). \tag{2.15}$$

由 ψ-混合的定义有

$$P(B_{i_1}B_{i_2}\cdots B_{i_N})\leqslant(1+\psi(i_2-i_1))P(B_{i_1})P(B_{i_2}\cdots B_{i_N})\leqslant(1+\psi(1))P(B_{i_1})P(B_{i_2}\cdots B_{i_N})$$
$$\leqslant\cdots\leqslant(1+\psi(1))^NP(B_{i_1})P(B_{i_2})\cdots P(B_{i_N}). \tag{2.16}$$

由此及(2.15)有

$$P(|T'_n(2)|>\varepsilon)\ll\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_N\leqslant K_n}P(B_{i_1})\cdots P(B_{i_N})\leqslant\{\sum_{i=1}^{K_n}P(B_i)\}^N$$
$$\leqslant\{\sum_{i=1}^{K_n}E(a_{ni}X_i)^2\cdot n^{2\rho}\}^N\ll n^{(2\rho-\alpha)N}. \tag{2.17}$$

取 ρ 充分小而 N 充分大即有 $\sum\limits_n P(|T'_n(2)|>\varepsilon)<\infty$. 由此及(2.14)有

$$\sum_n P(|T_n(2)|>2\varepsilon)<\infty. \tag{2.18}$$

于是，$\lim\limits_{m\to\infty}Q_m(2)=0$.

（三） 最后证$\lim\limits_{m\to\infty}Q_m(3)=0$. 记 $T'_n(3)=\sum\limits_{i=1}^{K_n}a_{ni}X_{ni}(3)$，则

$$(T'_n(3))^2\leqslant A_n\cdot\sum_{i=1}^{K_n}X_i^2I_{(|a_{ni}X_i|\geqslant\varepsilon/N)}$$
$$\ll n^{-\alpha}\sum_{i=1}^{\infty}X_i^2I_{(|X_i|\geqslant i^{1/p}\varepsilon/BN)}. \tag{2.19}$$

由$\{X_i;i\geqslant1\}$被 r.v. X 所界，且 $E|X|^p<\infty$，有

$$\sum P(|X_i| \geqslant i^{1/p}\varepsilon/BN) \leqslant \sum P(|X| \geqslant i^{1/p}\varepsilon/BN) < \infty.$$

从而，由 Borel-Cantelli 引理知

$$S \equiv \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 I_{(|X_i| \geqslant i^{1/p}\varepsilon/BN)} < \infty, \text{a.s.} \tag{2.20}$$

由(2.19)有$(T_n'(3))^2 \ll n^{-\alpha} S$，a.s.，于是 $T_n'(3) \to 0$，a.s.，由此及(2.14)知，$T_n(3) \to 0$，a.s.，再由 a.s. 收敛准则有，$\lim\limits_{m\to\infty} Q_m(3) = 0$. 证毕.

注 1 此定理将[1]中定理 2.1 推广到 φ-混合情形，且消除了其条件(c)和弱化了其条件(a).

定理 2 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$为 φ-混合，均值为零且被 r.v. X 所界. 如果 $E|X|^p < \infty$(其中 $p \geqslant 2$)，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i) < \infty$，且存在整数 $m \geqslant 1$ 和常数 $B > 0$ 使

$$1 \leqslant m \leqslant K_n, \quad K_n \varphi(m)/m \leqslant B, \tag{2.21}$$

$$|a_{ni}| \leqslant B i^{-1/p} \log^{-1} n, \quad i = 1,2,\cdots,K_n, n \geqslant 1, \tag{2.22}$$

$$A_n = o(\log^{-1} n), \quad \forall\, n \geqslant 1, \tag{2.23}$$

则 $T_n \to 0$，a.s.

证明 给定 $\varepsilon > 0$，令

$$X_{ni}(1) = X_i I_{(|a_{ni}X_i| \leqslant \varepsilon(32m\log n)^{-1})}, \quad X_{ni}(2) = X_i - X_{ni}(1),$$

$$\overline{X}_{ni}(j) = X_{ni}(j) - EX_{ni}(j), \quad T_n(j) = \sum_{i=1}^{K_n} a_{ni} \overline{X}_{ni}(j),$$

$$Q_m(j) = P(\bigcup_{n=m}^{\infty} \{|T_n(j)| > \varepsilon\}), \quad j = 1,2.$$

如定理 1 证明中所述，仅需证$\lim\limits_{m\to\infty} Q_m(j) = 0 (j = 1,2)$.

（一） 现利用引理 2 来证$\lim\limits_{m\to\infty} Q_m(1) = 0$. 因为$|a_{ni}\overline{X}_{ni}(1)| \leqslant \varepsilon(16m\log n)^{-1} \stackrel{\triangle}{=} d$，$\Delta_2 \leqslant C_0 A_n$(其中 $C_0 > 0$ 为常数). 由(2.21)有，$C_1 \leqslant \exp\{eB\} < \infty$. 由 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i) < \infty$ 有，$C_2 < \infty$. 取 $t = \min\{\varepsilon(2C_2C_0A_n)^{-1}, (4md)^{-1}\}$. 则由引理 2，有

$$P(|T_n(1)| > \varepsilon) \ll \exp\{-t\varepsilon + C_2 t^2 C_0 A_n\} \ll \exp\{-t\varepsilon/2\}. \tag{2.24}$$

(i) 当 $t = \varepsilon(2C_2C_0A_n)^{-1}$时，由(2.23)知，当 n 充分大，有

$$A_n < \varepsilon^2(5C_2C_0\log n)^{-1}.$$

从而，由此式及(2.24)有

$$P(|T_n(1)| > \varepsilon) \ll \exp\{-\varepsilon^2(4C_2C_0A_n)^{-1}\} \ll \exp\{-\frac{5}{4}\log n\}$$
$$= n^{-5/4}. \tag{2.25}$$

(ii) 当 $t = (4md)^{-1}$时，由于 $d = \varepsilon(16m\log n)^{-1}$，所以 $t = 4\log n/\varepsilon$. 因此，由(2.24)有

$$P(|T_n(1)| > \varepsilon) \ll \exp\{-2\log n\} = n^{-2}. \tag{2.26}$$

由(2.25)和(2.26)知，$\sum\limits_n P(|T_n(1)| > \varepsilon) < \infty$. 从而，$\lim\limits_{m\to\infty} Q_m(1) = 0$.

（二） 现证$\lim\limits_{m\to\infty} Q_m(2)=0$. 记 $T'_n(2) = \sum\limits_{i=1}^{K_n} a_{ni}X_{ni}(2)$. 则

$$|ET'_n(2)| \leqslant \sum_{i=1}^{K_n} E|a_{ni}X_{ni}(2)| \ll A_n \log n \to 0 \quad (\text{当 } n \to \infty). \tag{2.27}$$

注意到(2.20)式，有

$$\begin{aligned}(T'_n(2))^2 &\leqslant A_n \sum_{i=1}^{K_n} X_i^2 I_{(|a_{ni}X_i| > \varepsilon(32m\log n)^{-1})} \ll (\log n)^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 I_{(|X_i| > i^{1/p}\varepsilon(32mB)^{-1})} \\ &\ll (\log n)^{-1} S(\text{a.s.}) \to 0,\ \text{a.s.}\ (\text{当 } n \to \infty).\end{aligned} \tag{2.28}$$

联合(2.27)和(2.28)有，$T_n(2) \to 0$, a.s. 从而 $Q_m(2) \to 0$(当 $m \to \infty$). 证毕.

注 2 当$\{X_i; i \geqslant 1\}$为 m-相依时，显然(2.21)成立. 因此[1]中定理 2.2 为本定理的推论. 同样也消除了其条件(e).

记 $\log^+ x = \max\{0, \log x\}$.

定理 3 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$为 ψ-混合，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \psi(i) < \infty$, $EX_i = 0 (i = 1, 2, \cdots)$, $K_n = n^{\lambda}$(其中 $\lambda \geqslant 1$). 如果存在 $0 < \alpha \leqslant 1$ 和常数 $B > 0$ 使

$$E|X_i|^{(1+\lambda)/\alpha} (\log^+ |X_i|)^2 \leqslant B \quad (i = 1, 2, \cdots), \tag{2.29}$$

$$A_n \leqslant Bn^{-\alpha}, \quad \forall\, n \geqslant 1, \tag{2.30}$$

则 T_n 完全收敛于 0.

证明 沿用定理 1 证明中的有关记号，并由定理 1 证明中的（一），（二）部分知，$\sum\limits_n P(T_n(j)| > 2\varepsilon) < \infty (j = 1, 2)$. 因此，仅需证 $I = \sum\limits_n P|T_n(3)| > 2\varepsilon) < \infty$. 记 $X_{ni}(3) = X_i I_{(|X_i| > n^{\alpha}\varepsilon/NB)}$. 由 Tchebychev 不等式和引理 1，有

$$\begin{aligned}P(|T_n(3)| > 2\varepsilon) &\ll \sum_{i=1}^{K_n} E(a_{ni}\overline{X}_{ni}(3))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{K_n} E(a_{ni}X_{ni}(3))^2 \\ &\ll \sum_{i=1}^{n^{\lambda}} E|a_{ni}X_{ni}(3)|^{(1+\lambda)/\alpha} (\log^+ |X_{ni}|)^2 / (\log n)^2 \\ &\ll (\log n)^{-2} \sum_{i=1}^{n^{\lambda}} |a_{ni}|^{(1+\lambda)/\alpha} E|X_{ni}|^{(1+\lambda)/\alpha} (\log^+ |X_{ni}|)^2 \\ &\ll (\log n)^{-2} \sum_{i=1}^{n^{\lambda}} |a_{ni}|^{(1+\lambda)/\alpha} \leqslant (\log n)^{-2} A_n^{(1+\lambda)/2\alpha} \\ &\ll (\log n)^{-2} n^{-(1+\lambda)/2}.\end{aligned}$$

由于$(1+\lambda)/2 \geqslant 1$，所以从上式知，$I < \infty$. 证毕.

注 3 此定理推广并改进了[2]中定理 7，事实上，取消了[2]中条件：$|a_{ni}| \leqslant BA_n$.

定理 4 设$\{X_i; i \geqslant 1\}$为 φ-混合，$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi^{1/2}(i) < \infty$, $EX_i = 0 (i = 1, 2, \cdots)$, $K_n = n^{\lambda}$(其中 $\lambda > 1$). 如果存在 $0 < \alpha \leqslant 1$ 和常数 $B > 0$ 使

$$E|X_i|^{(1+\lambda)/\alpha} \leqslant B, \quad \forall\, i \geqslant 1, \tag{2.31}$$

$$A_n \leqslant Bn^{-\alpha}, \quad \forall\, n \geqslant 1, \tag{2.32}$$

则 T_n 完全收敛于 0.

证明　令

$$X_{ni}(1) = X_i I_{(|a_{ni}X_i| \leqslant n^{-\rho})}, \quad X_{ni}(2) = X_i - X_{ni}(1),$$

$$\overline{X}_{ni}(j) = X_{ni}(j) - EX_{ni}(j), \quad T_n(j) = \sum_{i=1}^{n^\lambda} a_{ni}\overline{X}_{ni}(j), \quad j = 1,2.$$

由(2.1)知，$\sum_n P(|T_n(1)| > 2\varepsilon) < \infty$．又由 Tchebychev 不等式和引理 1 有

$$P(|T_n(2)| > 2\varepsilon) \ll \sum_{i=1}^{n^\lambda} E(a_{ni}\overline{X}_{ni}(2))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n^\lambda} E(a_{ni}X_{ni}(2))^2$$

$$\ll \sum_{i=1}^{n^\lambda} |a_{ni}|^{(1+\lambda)/\alpha} \cdot n^{\rho(\frac{1+\lambda}{\alpha}-2)} \leqslant A_n^{(1+\lambda)/2\alpha} \cdot n^{\rho(\frac{1+\lambda}{\alpha}-2)}$$

$$\ll n^{-(1+\lambda)/2+\rho(\frac{1+\lambda}{2}-2)}.$$

由于 $\lambda>1$，所以 $(1+\lambda)/2>1$．从而在上式中取 ρ 充分小即有 $\sum P(|T_n(2)| > 2\varepsilon) < \infty$．于是定理获证.

参 考 文 献

[1] 蔡宗武，关于随机变量加权和强收敛性注记，高校应用数学学报，1991，6(1)：44—51.

[2] Y. S. Chow，*Some convergence theorems for independent random variables*，Ann. Math. Statist.，1966，37：1482—1492.

[3] P. Billingsley，*Convergence of Probability Measures*，John Wiley & Sons，1968.

[4] 邵启满，一矩不等式及其应用，数学学报，1988，31(6)：736—747.

[5] M. Peligrad，*Invariance principles for mixing sequences of random variables*，Ann. Probab，1982，10(4)：968—981.

[6] 陆传荣、林正炎、陆传赉，概率论极限理论引论，高等教育出版社，1989.

Convergence of Weighted Sums of Dependent Random Variables

Yang Shanchao

(Dept. of Math., Guangxi Normal University, Guilin 541004)

Abstract

We consider the almost sure and complete convergence of weighted sums of dependent random variables. The results generalize and improve some previous ones in [1] and [2].

Keywords dependent random sequences, weighted sums, almost sure and complete convergence.