第15卷第4期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

关于不可分辨性与稳定性的几个结果*

应 明 生
(江西师范大学数学系，南昌 330027)

摘 要 本文建立了超积中的不可分辨性与各因子模型中相应性质的联系，证明了若模型关于某公式集稳定，则对其 Boole 闭包亦然.

关键词 模型论，稳定性.
分类号 AMS(1991) 03C55/CCL O141.41

本文采用[1]的术语和符号.

[1]讨论的是巨(monster)模型 $\mathfrak{C}$ 中的不可分辨序列(集). 若将[1]，定义 I.2.3,4 的 $tp_\Delta(\bar{a},A)$ 换为 $tp_\Delta(\bar{a},A,M)$，则可定义 M 中 A 上的 $\Delta-n$-不可分辨序列(集)(参见[2],3.3). 这时，我们有

命题1 若 $S=\{t\in T:\langle\bar{a}^i[a]:i<t\rangle$ 是 M_t 中 A_t 上 $\Delta-n$-不可分辨序列(集)$\}\in D$，则 $\langle\bar{a}^i:i<\alpha\rangle$ 是 $\prod_D M_t$ 中 $\prod_D A_t$ 上 $\Delta-n$-不可分辨序列(集). 反过来，若 D 是 $(|\alpha|+|\Delta|)^+$-完备的且 $\langle\bar{a}^i:i\leqslant\alpha\rangle$ 是 $\prod_D M_t$ 中 $\Delta-n$-不可分辨序列(集)，则 $R=\{t\in T:\langle\bar{a}^i[t]:i<\alpha\rangle$ 是 M_t 中 $\Delta-n$-不可分辨序列(集)$\}\in D$.

证明 仅就集的情形证之，序列的情形完全类似.

(1) 对任意 n 个不同的 $<\alpha$ 序数之集 $i=\{i^0,\cdots,i^{n-1}\}$，$j=\{j^0,\cdots,j^{n-1}\}$ 及 $\varphi\in\Delta$，$\bar{c}\in\prod_D A_t$，记 $\bar{a}=\bar{a}^{i^0}\cap\cdots\cap\bar{a}^{i^{n-1}}$，$\bar{b}=\bar{a}^{j^0}\cap\cdots\cap\bar{a}^{j^{n-1}}$. 若 $\prod_D M_t\models\varphi[\bar{a};\bar{c}]$，则 $U=\{t\in T:M_t\models\varphi[\bar{a}[t];\bar{c}[t]]\}\in D$. 因为 $V=\{t\in T:M_t\models\varphi[\bar{a}[t];\bar{c}[t]]\Leftrightarrow M_t\models\varphi[\bar{b}[t];\bar{c}[t]]\}\supseteq S\in D$，所以 $U\cap V\subseteq\{t\in T:M_t\models\varphi[\bar{b}[t];\bar{c}[t]]\}\in D$，即 $\prod_D M_t\models\varphi[\bar{b};\bar{c}]$. 反之亦然. 因此，$\langle\bar{a}^i:i<\alpha\rangle$ 是 $\prod_D M_t$ 中 $\prod_D A_t$ 上 $\Delta-n$-不可分辩集.

(2) $i,j,\varphi,\bar{a},\bar{b}$ 如(1). 令 $U(i,j,\varphi)=\{t\in T:M_t\models\varphi[\bar{a}[t]]\Leftrightarrow M_t\models\varphi[\bar{b}[t]]\}$，则 $R\supseteq\bigcap\{U(i,j,\varphi):i,j,\varphi$ 如上$\}$. 由于 D 是 $(|\alpha|+|\Delta|)^+$-完备的，只须证每个 $U(i,j,\varphi)\in D$. 记 $A=\{t\in T:M_t\models\varphi[\bar{a}[t]]\}$，$B=\{t\in T:M_t\models\varphi[\bar{b}[t]]\}$. 因为 $\langle\bar{a}^i:i<\alpha\rangle$ 是 $\prod_D M_t$ 中 $\Delta-n$-不可分辩集，则 $\prod_D M_t\models\varphi[\bar{a}]\Leftrightarrow\prod_D M_t\models\varphi[\bar{b}]$，即 $A\in D\Leftrightarrow B\in D$. 注意 $U(i,j,\varphi)=(A\cap B)\cup((T-A)\cap(T-B))$. 若 $A\in D$，则 $B\in D$，从而 $A\cap B\subseteq U(i,j,\varphi)\in D$. 若 $A\notin D$，则 $B\notin D$；从而 $T-A$，$T-B\in$

* 1992年7月5日收到.

$D,(T-A)\cap(T-B)\subseteq U(i,j,\varphi)\in D$. □

[1]中引理 I.2.3.(1)指出:$\Delta\subseteq\Delta_1$,Δ_1-不可分辨性$\Rightarrow\Delta$-不可分辨性,反之不然.但是,我们有

命题 2 若 I 是 A 上 $\Delta-n$-不可分辨序列(集),则它也是 A 上 $\mathrm{cl}_3(\Delta)-n$-不可分辨序列(集).

证明 反证法,类似于下述命题 4.

定义 若对任意 $A\subseteq|M|$,$|A|\leqslant\lambda$ 及 $m<\omega$,$|S_\Delta^m(A,M)|\leqslant\mu$,则称 M 是(λ,μ,Δ)-稳定的.

命题 3 若 $M_i,i<\alpha$ 是初等链;对任意 $i<\alpha$,存在 $j,i\leqslant j<\alpha$ 使 M_j 是(λ,Δ)-稳定的且 $\lambda<cf\alpha$,则 $\bigcup_{i<\alpha}M_i$ 是$(\lambda,|\alpha|,\Delta)$-稳定的.

证明 首先,我们有

(1) $M\prec N,\bar{b}\in|M|,A\subseteq|M|\Rightarrow \mathrm{tp}_\Delta(\bar{b},A,M)=\mathrm{tp}_\Delta(\bar{b},A,N)$.由此即知

(2) $M\prec N$,N 是(λ,Δ)-稳定的$\Rightarrow M$ 是(λ,Δ)-稳定的若 $A\subseteq|\bigcup_{i<\alpha}M_i|$,则由 $\lambda<\mathrm{cf}\alpha$ 得知存在 $i_0<\alpha$ 使 $A\subseteq|M_{i_0}|$.若 $\bar{b}\in|\bigcup_{i<\alpha}M_i|$,则存在 $j,i_0\leqslant j<\alpha$ 使 $\bar{b}\in|M_j|$.由(1)得知 $\mathrm{tp}_\Delta(\bar{b},A,\bigcup_{i<\alpha}M_i)\in S_\Delta^m(A,M_j)$.因此,

(3) $\bigcup_{i_0\leqslant i<\alpha}S_\Delta^m(A,M_i)\supseteq S_\Delta^m(A,\bigcup_{i<\alpha}M_i)$.

最后,由(2)及条件得知对任意 $i,i_0\leqslant i<\alpha$,$|S_\Delta^m(A,M_i)|\leqslant\lambda$,从而 $|S_\Delta^m(A,\bigcup_{i<\alpha}M_i)|\leqslant|\alpha|$. □

显然,$\Delta_1\subseteq\Delta_2$,$\Delta_2$-稳定性$\Rightarrow\Delta_1$-稳定性,反之不成立.可是,我们有

命题 4 若 M 是(λ,Δ)-稳定的,则它也是$(\lambda,\mathrm{cl}_3(\Delta))$-稳定的.

证明 易知这仅须让

(1) $A\subseteq|M|,\bar{b},\bar{c}\in|M|,\mathrm{tp}_{\mathrm{cl}_3(\Delta)}(\bar{b},A,M)\neq\mathrm{tp}_{\mathrm{cl}_3(\Delta)}(\bar{c},A,M)\Rightarrow\mathrm{tp}_\Delta(\bar{b},A,M)\neq\mathrm{tp}_\Delta(\bar{c},A,M)$.

事实上,若 $\mathrm{tp}_{\mathrm{cl}_3(\Delta)}(\bar{b},A,M)\neq\mathrm{tp}_{\mathrm{cl}_3(\Delta)}(\bar{c},A,M)$,则存在 $\psi_{ij_i}\in\mathrm{cl}_1(\Delta)$,$\bar{a}_{ij_i}\in A\ (i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n_i)$使

(2) $M\models\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n_i}\psi_{ij_i}[\bar{b};\bar{a}_{ij_i}]$, $M\models\neg\bigvee_{i=1}^{m}\bigwedge_{j=1}^{n_i}\psi_{ij_i}[\bar{c};\bar{a}_{ij_i}]$.

或反之.仅考虑前一情形,后一情形完全一样.由(2)的前一式得知存在 $i_0,1\leqslant i_0\leqslant m$ 使

(3) $M\models\bigwedge_{j_{i_0}=1}^{n_{i_0}}\psi_{i_0j_{i_0}}[\bar{b};\bar{a}_{i_0j_{i_0}}]$.

再由(2)的后一式得

(4) $M\models\neg\bigwedge_{j_{i_0}=1}^{n_{i_0}}\psi_{i_0j_{i_0}}[\bar{c};\bar{a}_{i_0j_{i_0}}]$.

此即存在 $j_{i_0}^0,1\leqslant j_{i_0}^0\leqslant n_{i_0}$.使

(5) $M\models\neg\psi_{i_0j_{i_0}^0}[\bar{c};\bar{a}_{i_0j_{i_0}^0}]$.

而由(3)得

(6) $M\models\psi_{i_0j_{i_0}^0}[\bar{b};\bar{a}_{i_0j_{i_0}^0}]$.

由 $\mathrm{cl}_1(\Delta)$的定义得知存在 $\varphi\in\Delta$,$\bar{a}\in|M|$使

(7)　$M\models\varphi[\bar{b};\bar{a}]$，　$M\models 7\varphi[\bar{c};\bar{a}]$.

或反之. 因此，$\mathrm{tp}_\Delta(\bar{b},A,M)\neq\mathrm{tp}_\Delta(\bar{c},A,M)$.

由[1]，引理 I.1.12，练习 I.1.1 并注意：若 p 是 M 中 A 上 $\Delta-m$-完全型，则 $p=\mathrm{tp}_\Delta(\bar{b},A,M)$ 当且仅当 $\bar{b}$ 在 M 中实现 p，我们有：若 $\|M\|<\aleph_0$，则 $S_\Delta^m(A,M)=$ 所有 M 中 A 上 $\Delta-m$-完全型之集. 但是，一般来说这个结论并不成立.

引理　任意 M 中 A 上 $\Delta-m$-型可以扩张为 M 中 A 上 $\Delta-m$-完全型.

证明　给定 M 中 A 上 $\Delta-m$-型 p. 将 $\{\varphi(\bar{x};\bar{a}):\varphi(\bar{x};\bar{y})\in\Delta,\bar{a}\in A,l(\bar{a})=l(\bar{y})\}$ 良序化为 $\varphi_i(\bar{x};\bar{a}_i)$，$i<\alpha$. 施归纳法定义 $\Delta-m$-型的递增序列 p_i，$i<\alpha$ 如下：$p_0=p$，$p_\delta=\bigcup_{i<\delta}p_i$. 若 p_i 已定义，则 $p_i\cup\{\varphi_i(\bar{x};\bar{a}_i)\}$，$p_i\cup\{7\varphi_i(\bar{x};\bar{a}_i)\}$ 必有一个在 M 中有限可满足，令其为 p_{i+1}. 这样，$p\subseteq p_\alpha$ 是完全的.

例　设 L 有无限多个变目数 $\leqslant m$ 的谓词号 R_i，$i<\omega$（若 $A\neq\varphi$ 或至多有一个常量符号，则不必要求变目数 $\leqslant m$），$\Delta\supseteq\{R_i(\bar{x}):i<\omega\}$（对变目数 $k>m$ 的 R_i，$R_i(\bar{x})$ 换为 $R_i(\bar{x};\bar{a})$，$\bar{a}=\langle a_1,\cdots,a\rangle$，$a\in A$ 或为常元符号，$l(\bar{a})=k-m$）. 再设 $\|M\|\geqslant\aleph_0$.（不妨设 $|M|\supseteq\omega$），$R_i^M=\{\bar{b}=\langle b,\cdots,b\rangle:l(\bar{b})=R_i$ 的变目数，$b\in\omega-i\}$（对变目数 $k>m$ 的 R_i，$\bar{b}$ 换为 $\langle\underbrace{b,\cdots,b}_{m};\underbrace{a,\cdots,a}_{k-m}\rangle$. 若 $\bar{a}$ 中的 a 是常量符号，则 $\bar{b}$ 中的 a 实际上应该是 a^M）. 这时，$S_\Delta^m(A,M)\neq$ 所有 M 中 A 上 $\Delta-m$-完全型之集. 事实上，令 $p=\{R_i(\bar{x}):i<\omega\}$（对变目数 $>m$ 的 R_i 作相应的调整），易知 p 是 M 中 A 上的 $\Delta-m$-型. 由引理将 p 扩张为完全型 p^+. 此外，易看出没有 $\bar{b}\in{}^m|M|$ 在 M 中实现 p，从而也没有 $\bar{b}\in|M|$ 在 M 中实现 p^+. 因此，$p^+\notin S_\Delta^m(A,M)$.

参 考 文 献

[1] S. Shelah, *Classification Theory and the Number of Non-Isomorphic Models*, North-Holland (Amsterdam, 1978).

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory*, North-Holland (Amsterdam, 1973).

Some Results on Indistinguishable Stability

Ying Mingsheng

(Dept. of Math., Jiangxi Normal Univ., Nanchang 330027)

Abstract

In this paper, we relate the indistinguishable sequeuces and sets in an ultraproduct with the ones in all factor models and show that the stability with respect to some set of formulae implies the stability with respect to its Boolean closure.

Keywords Model theory, stability.