第15卷第4期 1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 No. 4 Nov. 1995

Hardy 空间中的 Bloch 函数*

乌兰哈斯
(内蒙古师范大学数学系，呼和浩特 010022)

摘　要　本文利用单位圆盘内解析函数的 Shimizu-Ahlfors 特征函数分别给出了 Hardy 空间中 Bloch 函数和 BMOA 的新特征. 由此我们发现了 $B\cap H^p(0<p<\infty)$ 与 BMOA 之间的本质差别.

关键词　Shimizu-Ahlfors 特征函数，Hardy 空间，Bloch 函数，BMOA.
分类号　AMS(1991) 30D45，30D55/CCL O174.52

设 f 在单位圆盘 $D=\{z,|z|<1\}$ 内解析，令

$$f_p^*(z)=\frac{p}{2}|f(z)|^{\frac{p}{2}-1}|f'(z)|,\quad 0<p<\infty.$$

在 f 的零点处才可能有 $f_p^*=\infty$，若 f 在 D 内无零点时，便有 $f_p^*=|(f^{\frac{p}{2}})'|$，当 $p=2$ 时，$f_2^*=|f'|$. 令 f 的 p 级 Shimizu-Ahlfors 特征函数为

$$T_p^*(r,f)=\frac{2}{\pi p}\int_0^r t^{-1}\iint_{|z|<t}f_p^*(z)^2dxdydt,\quad 0<r<1,$$

$$T_p^*(1,f)=\lim_{r\to1}T_p^*(r,f).$$

对于 $w\in D$，$0<r\leqslant1$，令

$$D(w,r)=\{z\in D,|z-w|<(1-|w|)r\}$$

设 $\varphi_w(z)=w+(1-|w|)z$，则 $f\circ\varphi_w$ 的 p 级 Shimizu-Ahlfors 特征函数为

$$T_p^*(r,w,f)=\frac{2}{\pi p}\int_0^r t^{-1}\iint_{D(w,t)}f_p^*(z)^2dxdydt,$$

$$T_p^*(1,w,f)=\lim_{r\to1}T_p^*(r,w,f).$$

Hardy 空间 $H^p(0<p<\infty)$[4] 和 Bloch 空间 $B=\{f,f$ 是 D 内解析函数且 $\|f\|_B=\sup_{z\in D}|f'(z)|(1-|z|^2)<\infty\}$[1] 都是重要的函数空间. BMOA 是 H^∞ 的很好的替代空间，并且 BMOA $\subset B\cap H^p(0<p<\infty)$. [3]中的例子表明 BMOA 是 $B\cap H^p(0<p<\infty)$ 的真子集. 许多文献都研究了 BMOA 的特征[2,5]，而 $B\cap H^p(0<p<\infty)$ 都有哪些特征呢？这些特征与 BMOA 的特征有何关系呢？本文利用 Shimizu-Ahlfors 特征函数，对这一问题给出了回答，同时也指出了 $B\cap H^p(0<p<\infty)$ 与 BMOA 之间的本质差别. 本文的主要结果是

* 1992年8月23日收到.

定理 1 设 f 是 D 内的解析函数，$0<p<\infty$. 则 $f\in B\cap H^p$ 的充分必要条件是

$$\sup_{w\in D} T_p^*(1,w,f)<\infty. \tag{1}$$

证明 设 $f\in B\cap H^p(0<p<\infty)$. 对于任意的 $r(0<r<1)$ 及 $w\in D$ 有

$$T_p^*(r,w,f)=T_p^*\left(\frac{r}{2},w,f\right)+\frac{2}{\pi p}\int_{\frac{r}{2}}^{r}t^{-1}\iint_{D(w,t)}f_p^*(z)^2\,dx\,dy\,dt=\alpha+\beta.$$

由于 $f_p^*(z)^2=\frac{p^2}{4}|f(z)|^{p-2}|f'(z)|^2$，所以当 $2\leqslant p<\infty$ 时，对任意的 $c(0<c<1)$，当 $|w|<c$ 时，必有 $f_p^*(z)$ 在 $D\left(w,\frac{1}{2}\right)$ 内有界. 因此存在与 w 及 r 无关的常数 k 使得 $\alpha\leqslant k$.

当 $0<p<2$ 时，由 Green 公式可得

$$\iint_{D(w,t)}f_p^*(z)^2\,dx\,dy=\frac{p}{4}\iint_{D(w,t)}\Delta(|f(z)-f(0)|^p)\,dx\,dy$$

$$=\frac{p}{4}t\frac{d}{dt}\int_0^{2\pi}|f(w+(1-|w|)te^{i\theta})-f(w)|^p\,d\theta.$$

从而

$$T_p^*(r,w,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(w+(1-|w|)re^{i\theta})-f(w)|^p\,d\theta. \tag{2}$$

由 Hölder 不等式得到

$$T_p^*(r,w,f)\leqslant(T_2^*(r,w,f))^{\frac{p}{2}}. \tag{3}$$

因此对任何 $p(0<p<\infty)$ 都有 $\alpha\leqslant k'$.

下面估计 β. 对任意的 $t(0<t<1)$ 有

$$D(w,t)\subset\{z,|z|<\rho\},\quad |w|<c,$$

其中 $\rho=c+t(1-c)$. 从而

$$\beta\leqslant\frac{2}{\pi p}\int_{c+\frac{r}{2}(1-c)}^{c+r(1-c)}\frac{1}{\rho-c}\iint_{|z|<\rho}f_p^*(z)^2\,dx\,dy\,d\rho\leqslant\frac{2C}{\pi p(1-c)}\int_0^1\rho^{-1}\iint_{|z|<\rho}f_p^*(z)^2\,dx\,dy\,d\rho$$

$$=\frac{C}{1-c}T_p^*(1,0,f), \tag{4}$$

其中 C 是常数.

由于 $T_p^*(1,0,f)<\infty$ 是 H^p 函数的一个特征[6]，所以从(4)及前面对 α 的估计对 $c(0<c<1)$ 有

$$\sup_{|w|<c}T_p^*(1,w,f)<\infty. \tag{5}$$

又 f 是 Bloch 函数，所以由[7]中定理 2 对任意的 $c(0<c<1)$ 有

$$\sup_{c\leqslant|w|<1}T_2^*(1,w,f)<\infty.$$

因此当 $0<p\leqslant2$ 时，由(3)知

$$\sup_{c\leqslant|w|<1}T_p^*(1,w,f)<\infty. \tag{6}$$

当 $2<p<\infty$ 时，设 f 在 $w\in D$ 有展式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-w)^n$，$|z-w|<(1-|w|)$. 从而

$$F_w(z)=f\circ\varphi_w(z)-f\circ\varphi_w(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(w)}{n!}(1-|w|)^n z^n,\quad |z|<1.$$

由于 $f\in B$，所以存在常数 k 满足

$$|f'(z)|(1-|z|^2)\leqslant k,\quad z\in D.$$

由[8]中结果知存在依赖于 r 的常数 c_r 使得

$$|f^{(n)}(w)|(1-|w|^2)^n\leqslant c_r(1-|w|)^{-1}\iint\limits_{\Delta(w,r)}|f'(z)|dxdy\leqslant c_r k',$$

其中 $\Delta(w,r)=\{z\in D,|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}|<r\}$ 是拟双曲圆.

由于 $2<p<\infty$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p-2}}{(n!)^p}$ 收敛，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\frac{f^{(n)}(w)(1-|w|)^n}{n!}|^p n^{p-2}\leqslant c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p-2}}{(n!)^p},$$

由 Hardy-Littlewood 定理[4]知 $F_w\in H^p$ 且

$$\|F_w\|_p^p\leqslant c_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{p-2}}{(n!)^p}.$$

因为上式的右端与 w 无关，所以对任意的 c，$0<c<1$，有

$$\sup_{c\leqslant|w|<1}\|f\circ\varphi_w-f(w)\|_p^p<\infty. \tag{7}$$

由(2)和(6)知

$$\sup_{c\leqslant|w|<1}T_p^*(1,w,f)<\infty,\quad 0<p<\infty.$$

结合(5)就得到了(1).

反之，若(1)成立，则取 $w=0$ 便得

$$T_p^*(1,0,f)<\infty.$$

由(6)可知 $f\in H^p(0<p<\infty)$.

对于 $r(0<r<1)$. 由不等式

$$|f'(0)|^p\leqslant c_p\iint\limits_{|z|<r}|f(z)|^p dxdy\leqslant c_p'\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p d\theta.$$

用 $f\circ\varphi_w-f(w)$ 替代上式中的 f 得

$$|f'(w)|^p(1-|w|)^p\leqslant c_p'\int_0^{2\pi}|f\circ\varphi_w(re^{i\theta})-f(w)|^p d\theta$$
$$\leqslant 2\pi c_p' T_p^*(1,w,f).$$

从而由(1)便可知 f 是 Bloch 函数，所以

$$f\in H^p\cap B\quad(0<p<\infty).$$

定理 1 证毕.

如果考虑 $f\circ\psi_w$ 的 Shimizu-Ahlfors 特征函数

$$T_p^*(r,f_w)=T_p^*(r,f\circ\psi_w),$$

其中 $\psi_w(z)=\frac{z+w}{1+\overline{w}z}$，我们可进一步得到

$$T_p^*(r,f_w)=\frac{2}{\pi p}\int_0^r t^{-1}\iint_{\Delta(w,t)} f_p^*(z)^2 dxdydt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(\frac{re^{i\theta}+w}{1+\bar{w}re^{i\theta}})-f(w)|^p d\theta.$$

用类似于定理 1 的证明方法及[9]中引理，还可得到另一个重要结果

定理 2 设 f 是 D 内的解析函数，$0<p<\infty$. 则 $f\in\mathrm{BMOA}$ 的充分必要条件是

$$\sup_{w\in D} T_p^*(1,f_w)<\infty. \tag{8}$$

注 从定理 1 和定理 2 可看出，$H^p\cap B$ 与 BMOA 的差别主要表现在函数 ψ_w 与 φ_w 的差别上，或者说主要表现在圆盘 $\Delta(w,r)$ 与 $D(w,r)$ 的差别上.

参 考 文 献

[1] S. Axler, Duke Math. J., 53(1986), 315—332.

[2] A. Baernstein, *Aspects of Contemporary Complex Analysis*, Academic Press, London, 1980, 3—36.

[3] D. Campbell, J. Cima, K. Stephenson, Proc. Amer. Math. Soc., 78(1980), 229—230.

[4] P. L. Duren, *Theory of H^p Spaces*, Academic Press, New York, 1970.

[5] J. B. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[6] S. Yamashita, J. Math. Anal. Appl., 80(1981), 298—304.

[7] S. Yamashita, Ann. Acad. Sci. Fen. S. A. I. Math., 11(1986), 207—213.

[8] D. Luecking, Amer. J. Math., 107(1985), 85—111.

[9] 乌兰哈斯，武汉大学学报，2(1992)，9—16.

Bloch Functions in Hardy Space

Wulan Hasi

(Inner Mongolia Normal University, Hohhot, 010022)

Abstract

We give some characterizations for Bloch functions in Hardy space and BMOA in terms of the Shimizu-Ahlfors characteristic functions of analytic functions on the unit disk. These results are used to discuss the main differences between BMOA and $H^p\cap B(0<p<\infty)$

Keywords Bloch function, Hardy space, BMOA.