非线性二阶微分方程的振动准则*

邵孝湟
(杭州师范学院数学系，310036)

陈文灯 (中央财政金融学院，北京 100081)
俞元洪 (中国科学院应用数学研究所，北京 100080)

摘 要 本文建立了非线性二阶微分方程

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)|x(t)|^{\alpha}\mathrm{sgn}\, x(t) = 0$$

的一个新的振动准则，并改进了文[1]的结果.

关键词 超线性，次线性，积分平均，振动准则.
分类号 AMS(1991) 34C15/CCl O175.12

§1 引 言

本文考虑非线性二阶微分方程

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)|x(t)|^{\alpha}\mathrm{sgn}\, x(t) = 0 \tag{1}$$

的振动性，其中 $\alpha>0$，$a,p,q:[t_0,\infty)\to R$ 是连续函数. $a(t)>0$，$t\geqslant t_0\geqslant 0$.

限于考虑方程(1)存在于射线$[t_0,\infty)$上的解. 方程(1)的解称为振动的，如果它有任意大的零点；否则，称它为非振动的. 方程(1)称为是振动的，如果它的一切解均是振动的.

最近，文[2]考虑了二阶微分方程

$$(a(t)x'(t))' + p(t)x'(t) + q(t)f(x(t)) = 0, \tag{2}$$

其中函数 a,p,q 的定义如同方程(1)，$f:R\to R$ 连续，$xf(x)>0$，$f'(x)\geqslant k>0$ 当 $x\neq 0$. 由于对函数 f 的条件太强，因此文[2]的结果对方程(1)的有些情形并不适用.

本文目的是利用更一般的积分平均方法来建立方程(1)的新的振动定理. 所得结果对超线性情形(即 $\alpha>1$)，推广且改进了文[1]的结果；对次线性情形(即 $\alpha<1$)，其结果也是新的，且与文[1]和文[3]的结果也是相互独立的. 当 $\alpha=1$ 时，本文结果与文[1]和[2]的是类似的.

§2 主要结果

设 $\Phi(t,t_0)$表示一切正的局部可积，但不是可积的函数类. 因此，它包括全部有界函数(当 t

* 1993年3月26日收到. 国家自然科学资金及中国科学院管理、决策与信息系统开放研究实验室资助项目.

$\geqslant t_0$ 时).

本文将使用下列记号:对任意 $\varphi\in\Phi(t,t_0)$和 $\rho\in C^1[[t_0,\infty),(0,\infty)]$,对任意 $T\geqslant t_0$,令

$$b[t,T]=\int_T^t\varphi(s)ds;\quad \eta(t)=\frac{1}{a(t)\rho(t)};\quad r(t)=a(t)\rho'(t)-p(t)\rho(t);$$

$$w[t,T]=\eta(t)(\int_T^t\eta(s)ds)^{-1};u[t,T^*]=\frac{1}{\varphi(t)}\int_{T^*}^t\frac{\varphi^2(s)}{w[s,T]}ds,\ \text{对某一}\ T^*>T;$$

$$A_\varphi[t,T]=\frac{1}{b[t,T]}\int_T^t\varphi(s)\int_T^s\rho(\tau)q(\tau)d\tau ds.$$

定理 1 设存在函数 $\varphi\in\Phi(t,t_0)$,$\rho\in C^1[[t_0,\infty),(0,\infty)]$,使得

$$r(t)\geqslant 0,\ r'(t)\leqslant 0,\ t\geqslant t_0. \tag{3}$$

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\rho(s)q(s)ds>-\infty; \tag{4}$$

$$\int^\infty\eta(s)ds=\infty \tag{5}$$

和

$$\int^\infty\frac{b^\mu[s,T]}{u[s,T]}ds=\infty,\quad \text{对某一}\ T\geqslant t_0,0<\mu<1. \tag{6}$$

若

$$\lim_{t\to\infty}A_\varphi[t,t_0]=\infty, \tag{7}$$

则方程(1)对一切 $a>1$ 是振动的.

证明 设方程(1)有非振动解 $x(t)$.不失一般,可使 $x(t)\neq 0$ 对 $t\geqslant t_0$.而且,不妨设 $x(t)>0$ 对 $t\geqslant t_0$.因为当 $x(t)<0$ 时,只须设 $y=-x$,可将方程(1)变换为满足定理假设的同样形式的方程.现在,定义 $V(t)=\rho(t)\frac{a(t)x'(t)}{x^a(t)}$, $t\geqslant t_0$.则由方程(1)得

$$V'(t)=-\rho(t)q(t)+r(t)\frac{x'(t)}{x^a(t)}-aa(t)\rho(t)\frac{x'^2(t)}{x^{a+1}(t)},\quad t\geqslant t_0. \tag{8}$$

因此

$$a(t)\rho(t)\frac{x'(t)}{x^a(t)}=c_1-\int_{t_0}^t\rho(s)q(s)ds+\int_{t_0}^t r(s)\frac{x'(s)}{x^a(s)}ds$$
$$-\int_{t_0}^t aa(s)\rho(s)(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)})^2dx, \tag{9}$$

其中 $\beta=\frac{a+1}{2}$,$c_1=a(t_0)\rho(t_0)\frac{x'(t_0)}{x^a(t_0)}$.注意到(3),由中值定理知,存在 $\xi\in[t_0,t]$,使得

$$\int_{t_0}^t r(s)\frac{x'(s)}{x^a(s)}ds=r(t_0)\int_{t_0}^\xi\frac{x'(s)}{x^a(s)}ds=r(t_0)\int_{x(t_0)}^{x(\xi)}y^{-a}dy$$
$$=\frac{r(t_0)}{a-1}[x^{1-a}(t_0)-x^{1-a}(\xi)]\leqslant\frac{r(t_0)}{a-1}x^{1-a}(t_0)=M_1.$$

由(9),对 $t\geqslant t_0$,有

$$a(t)\rho(t)\frac{x'(t)}{x^a(t)}+a\int_{t_0}^t a(s)\rho(s)(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)})^2ds+\int_{t_0}^t\rho(s)q(s)ds\leqslant L, \tag{10}$$

或写为

$$V(t)+a\int_{t_0}^{t}\eta(s)x^{2(\beta-1)}(s)V^2(s)ds+\int_{t_0}^{t}\rho(s)q(s)ds\leqslant L, \tag{11}$$

其中 $L=c_1+M_1$.

下面对 x' 分三种情形讨论:

(i) x' 振动. 则存在序列 $\{t_m\}_{m=1,2,\cdots}$, $\lim\limits_{m\to\infty}t_m=\infty$, 且 $x'(t_m)=0$, $m=1,2,\cdots$. 于是, 由(10)得

$$\int_{t_0}^{t_m}\alpha a(s)\rho(s)\left(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)}\right)^2ds\leqslant L-\int_{t_0}^{t_m}\rho(s)q(s)ds,\quad m=1,2,\cdots.$$

由条件(4)推出

$$\int_{t_0}^{\infty}a(s)\rho(s)\left(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)}\right)^2ds<\infty. \tag{12}$$

故有正常数 N, 使得 $\int_{t_0}^{t}a(s)\rho(s)\left(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)}\right)^2ds\leqslant N$, $t\geqslant t_0$. Schwarz 不等式给出

$$\left|\int_{t_0}^{t}\left(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)}\right)ds\right|^2\leqslant\left(\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)\rho(s)}\right)\left(\int_{t_0}^{t}a(s)\rho(s)\left(\frac{x'(s)}{x^\beta(s)}\right)^2ds\right)$$
$$\leqslant N\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{a(s)\rho(s)}=N\int_{t_0}^{t}\eta(s)ds,$$

或者 $|x^{1-\beta}(t)-x^{1-\beta}(t_0)|\leqslant|1-\beta|N^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_0}^{t}\eta(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$. 故存在 $t_1\geqslant t_0$ 和常数 $M>0$, 使得

$$|x^{1-\beta}(t)|\leqslant M\left(\int_{t_0}^{t}\eta(s)ds\right)^{\frac{1}{2}},\quad t\geqslant t_1. \tag{13}$$

在(8)中利用(12)和(13), 得 $V'(t)\leqslant-\rho(t)q(t)+r(t)\eta(t)V(t)-\frac{a}{M^2}w[t,t_0]V^2(t)$, $t\geqslant t_1$.

在(11)中利用(13), 有

$$V(t)+\frac{a}{M^2}\int_{t_1}^{t}w[s,t_0]V^2(s)ds\leqslant L_1-\int_{t_1}^{t}\rho(s)q(s)ds, \tag{14}$$

其中 L_1 是一常数. 用 $\varphi(t)$ 乘(14), 从 t_1 到 t 积分, 可得

$$\int_{t_1}^{t}\varphi(s)V(s)ds+\frac{a}{M^2}\int_{t_1}^{t}\varphi(s)\int_{t_1}^{s}w[\tau,t_0]V^2(\tau)d\tau ds\leqslant b[t,t_1](L_1-A_\varphi(t,t_1]). \tag{15}$$

注意到条件(7), 存在 $t_2\geqslant t_1$, 使得 $L_1-A_\varphi[t,t_1]<0$, $t\geqslant t_2$. 记

$$G(t)=\frac{a}{M^2}\int_{t_1}^{t}\varphi(s)\int_{t_1}^{s}w[\tau,t_0]V^2(\tau)d\tau ds,\quad t\geqslant t_2.$$

则 $G(t)<-\int_{t_1}^{t}\varphi(s)V(s)ds$, $t\geqslant t_2$. 因 $G(t)$ 是非负的, 有

$$G^2(t)<\left(\int_{t_1}^{t}\varphi(s)V(s)ds\right)^2,\quad t\geqslant t_2. \tag{16}$$

Schwarz 不等式给出

$$\left\{\int_{t_1}^{t}\left(\frac{\varphi(s)}{\sqrt{w[s,t_0]}}\right)\left(\sqrt{w[s,t_0]}V(s)\right)ds\right\}^2\leqslant\left(\int_{t_1}^{t}\frac{\varphi^2(s)}{w[s,t_0]}ds\right)\int_{t_1}^{t}w[s,t_0]V^2(s)ds$$
$$=\frac{M^2}{a}u[t,t_1]G'(t),\quad t\geqslant t_2. \tag{17}$$

现有

$$G(t)=\frac{a}{M^2}\int_{t_1}^{t}\varphi(s)\int_{t_1}^{s}w[\tau,t_0]V^2(\tau)d\tau ds$$

$$\geqslant\frac{a}{M^2}\int_{t_1}^{t}\varphi(s)\int_{t_1}^{t_2}w[\tau,t_0]V^2(\tau)d\tau ds=cb[t,t_1],\tag{18}$$

其中 $c=\frac{a}{M^2}\int_{t_1}^{t_2}w[\tau,t_0]V^2(\tau)d\tau$. 从(16),(17)和(18),得

$$\frac{ac^{\mu}}{M^2}\frac{b^{\mu}[t,t_1]}{u[t,t_1]}\leqslant G^{\mu-2}(t)G'(t),\quad t\geqslant t_2,\tag{19}$$

其中 μ 是一常数,用 $0\leqslant\mu<1$.

从 t_2 到 t 对(19)积分,有 $\frac{ac^{\mu}}{M^2}\int_{t_2}^{t}\frac{b^{\mu}[s,t_1]}{u[s,t_1]}ds\leqslant\frac{1}{1-\mu}\frac{1}{G^{1-\mu}(t_2)}<\infty$, 与(6)矛盾.

(ii) 若 $x'>0,t\geqslant T\geqslant t_0$. 则由(4)和(10)可以导出(12)成立. 余下的证明与情况(i)相同.

(iii) 若 $x'<0,t\geqslant T\geqslant t_0$. 如果(12)成立. 则与情况(i)一样,可以导出矛盾. 故我们现在假设(12)不成立. 利用(4)和(10),有

$$-a(t)\rho(t)\frac{x'(t)}{x^{a}(t)}\geqslant -c+a\int_{T}^{t}a(s)\rho(s)\left(\frac{[x'(s)]^2}{x^{a+1}(s)}\right)^2ds,\tag{20}$$

其中 c 为常数. 由假设,可以选取 $T_1\geqslant T$,使得 $a\int_{T}^{\pi}a(s)\rho(s)\frac{[x'(s)]^2}{x^{a+1}(s)}ds=1+c$. 由(20)产生

$$\frac{-a(t)\rho(t)\frac{x'(t)}{x^{a}(t)}\left(-a\frac{x'(t)}{x(t)}\right)}{-c+a\int_{T}^{t}a(s)\rho(s)\left(\frac{[x'(s)]^2}{x^{a+1}(s)}\right)ds}\geqslant -a\frac{x'(t)}{x(t)},$$

从 T_1 到 t 对上式积分得 $\ln[-c+a\int_{T_1}^{t}a(s)\rho(s)\frac{[x'(s)]^2}{x^{a+1}(s)}dx]\geqslant\ln(\frac{x(\pi)}{x(t)})^{a}$. 联合上式与(20)产生 $-a(t)\rho(t)\frac{x'(t)}{x^{a}(t)}\geqslant(\frac{x(\pi)}{x(t)})^{a}$, 则有 $x'(t)\leqslant -x^{a}(\pi)\frac{1}{a(t)\rho(t)}<0,\quad t\geqslant T_1$. 即

$$x(t)\leqslant x(\pi)-x^{a}(\pi)\int_{\pi}^{t}\eta(s)ds\rightarrow 0,\quad t\rightarrow\infty,$$

此与 $x(t)>0,t\geqslant t_0$ 矛盾. 定理证毕.

下面的结果是关于 $a>0$ 时方程(1)的振动性.

推论 1 设在定理 1 中可微函数 ρ 定义为

$$\rho(t)=\exp\left(\int_{t_0}^{t}\frac{p(s)}{a(s)}ds\right),\quad t\geqslant t_0,\tag{21}$$

且条件(3),(5),(6)和(7)成立. 则方程(1)对一切 $a>0$ 是振动的.

证明 设方程(1)有非振动解 $x(t)$. 不妨假设 $x(t)>0,t\geqslant t_0$. 由(21)可知 $r(t)=0,t\geqslant t_0$. 若定义函数 $V(t)$如前,则对任意 $a>0$,我们可得(10)或(11). 剩下的证明是类似于定理 1 的证明. 因此略去.

下面的推论研究了无阻尼方程

$$(a(t)x'(t))'+q(t)|x(t)|^{a}\mathrm{sgn}x(t)=0,\quad a>0\tag{22}$$

的振动性. 其中 a 和 q 的定义如同方程(1).

推论 2 设存在函数 $\varphi\in\Phi(t,t_0)$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}q(s)ds>-\infty, \tag{23}$$

$$\int^{\infty}\frac{1}{a(s)}ds=\infty, \tag{24}$$

$$\int^{\infty}\frac{b^{\mu}[s,T]}{B[s,T]}ds=\infty,\quad T\geqslant t_0, 0\leqslant\mu<1, \tag{25}$$

其中

$$B[t,T]=\frac{1}{\varphi(t)}\int_{t_0}^{t}\varphi(s)\int_{t_0}^{s}q(\tau)d\tau ds=\infty, \tag{26}$$

则方程(22)对一切 $\alpha>0$ 是振动的.

证明 在推论 1 中令 $p(t)=0,\rho(t)=1$ 即得.

现在，举例说明定理和推论的应用.

例 1 考虑二阶微分方程

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}x'(t)\right)'+\frac{\delta}{t\sqrt{t}}x'(t)+\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{2+\cos t}{2t}-\sin t\right]|x(t)|^{\alpha}\operatorname{sgn}x(t)=0, \tag{27}$$

$$\alpha>0, t\geqslant t_0=\frac{\pi}{2},$$

其中取

$$a(t)=\frac{1}{\sqrt{t}},\ p(t)=\frac{\delta}{t\sqrt{t}},\ q(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left[\frac{2+\cos t}{2t}-\sin t\right],$$

$$\rho(t)=t,\ \varphi(t)=\frac{1}{t},\quad t\geqslant t_0=\frac{\pi}{2}.$$

考虑下列两种情形：

(i) 令 $\delta=\frac{1}{2},\alpha>0$. 此时有

$$r(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}},\ b\left[t,\frac{\pi}{2}\right]=\ln\frac{2t}{\pi},\ \eta(t)=\frac{1}{\sqrt{t}},$$

$$w\left[t,\frac{\pi}{2}\right]=\frac{1}{2\sqrt{t}\left[\sqrt{t}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]},\quad t>\frac{\pi}{2}$$

和

$$u[t,\pi]=2t\left[\ln\frac{t}{\pi}-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{\frac{\pi}{t}}\right)\right],\quad t\geqslant t_1=\pi>t_0.$$

由简单计算可得 $\int^{t}\frac{b^{\mu}[s,t_1]}{u[s,t_1]}ds\geqslant\frac{1}{2}\int^{t}\frac{1}{s}\left(\ln\frac{s}{\pi}\right)^{\mu-1}ds\to\infty,\ t\to\infty,\ \mu\geqslant0$，和

$$A_{\varphi}[t,t_0]=\frac{1}{b\left[t,\frac{\pi}{2}\right]}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}\frac{1}{s}\int_{\frac{\pi}{2}}^{s}\sqrt{\tau}\left[\frac{2+\cos\tau}{2\tau}-\sin\tau\right]d\tau ds$$

$$\geqslant\frac{2}{\ln\frac{2t}{\pi}}\left[\sqrt{t}-\left(1+2\ln\frac{2t}{\pi}\right)\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]\to\infty,\ t\to\infty$$

易见，定理 1 的全部条件都满足，因此，方程(27)对一切 $a>1$ 是振动的.

(ii) 令 $\delta=1, a>0$，我们有 $r(t)=0,\ t\geqslant\frac{\pi}{2}$. 易知，此时推论 1 的全部条件满足. 因此，方程(27)对一切 $a>0$ 是振动的.

我们注意到还没有一个已知的振动准则能包含这一结果.

注 1 本文结果能同时适用于积分 $\int^{\infty}\frac{1}{a(s)}ds$ 是收敛或发散的，而且也不要求阻尼系数 $p(t)$ 是一个较小的函数. 这是很有意义的.

参 考 文 献

[1] G. J. Butler, *Integral averages and the oscillation of second order ordinary differential equations*, SIAM J. Math. Anal., 11(1980), 190—200.

[2] S. R. Grace and B. S. Lalli, *Integral averaging and the oscillation of second order nonlinear differential equations*, Ann. Mat. Pura. Appl. CLI(1988), 149—159.

[3] J. S. W. Wong, *An oscillation criterion for second order nonlinear differential equationsa*, Proc. Amer. Math. Soc., 98(1986), 109—112.

Oscillation Criteria for Second Order Nonlinear Differential Equations

Shao Xiaohuang
(Hangzhou Normal College, Hangzhou 310036)

Chen Wendeng
(Central Institute of Finance, Beijing 100081)

Yu Yuanhong
(Inst. of Appl. Math., Academia Sinica, Beijing 100080)

Abstract

New oscillation criteria for the second order nonlinear differential equations

$$(a(t)x'(t))'+p(t)x'(t)+q(t)|x(t)|^{\alpha}\mathrm{sgn}x(t)=0$$

are established, which improve results of [1].

Keywords superlinear, sublinear, integral averaging, oscillation criterion.