一阶中立型泛函微分方程解的渐近性与振动性*

王其如
(洛阳师范专科学校数学系,河南 471022)

摘 要 本文研究具有变系数和多偏差的一阶中立型微分方程,讨论了方程的非振动解的渐近性,得到了方程振动的充分判据,其中有些是变号系数的情形.

关键词 中立型方程,渐近性,振动.
分类号 AMS(1991) 34K15,34K25/CCL O175.12

§1 引 言

考虑一阶中立型微分方程

$$\frac{d}{dt}[x(t)-\sum_{i=1}^{m}P_i(t)x(t-\tau_i)]+a(t)x(t)+\sum_{j=1}^{n}Q_j(t)x(h_j(t))=0,\quad t\geqslant t_0,\tag{1}$$

其中 τ_i 为正常数,$P_i(t),a(t),Q_j(t),h_j(t)\in C([t_0,\infty),R)$,$P_i(t)$ 有界,$a(t),Q_j(t)\geqslant 0$,且 $\lim\limits_{t\to\infty}h_j(t)=\infty$,$i=1,\cdots,m$,$j=1,\cdots,n$,$m$ 和 n 为任意自然数.

最近,文[1-5]分别就方程(1)的特殊情形讨论了其解的渐近性与振动性.在本文中,我们将把文[1-5]中相应的结果推广到方程(1)上.

通常,方程(1)的一个解称为振动的,如果它具有任意大的零点;称为非振动的,如果它最终为正或最终为负.如果方程(1)的所有解都是振动的,则称方程(1)振动.

为了方便起见,假设文中的函数不等式除特别说明外,均指最终成立,即对充分大的 t 成立.

§2 基本引理

引理[6] 设 $x(t),y(t)\in C([t_0,\infty),R)$ 满足

$$y(t)=x(t)-\sum_{i=1}^{m}P_i(t)x(t-\tau_i),\tag{2}$$

其中 $P_i(t)\in C([t_0,\infty),R)$,$\tau_i>0$,$i=1,\cdots,m$.若

$$\lim_{t\to\infty}P_i(t)=P_i(i=1,\cdots,m),\ \sum_{i=1}^{m}|P_i|<1,\tag{3}$$

* 1992年11月14日收到.94年12月14日收到修改稿.河南省教委科研基金资助课题.

且$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=M$ 存在($|M|<\infty$),则$\lim\limits_{t\to\infty}x(t)$存在且等于 $M/(1-\sum\limits_{i=1}^{m}P_i)$.

引理 2 在(2)式中,假设 $\tau_i>0, P_i(t)\geqslant 0, i=1,\cdots,m$,且 $\sum\limits_{i=1}^{m}P_i(t)=1$,而 $x(t)$有界且最终为正或最终为负,则$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=M$ 存在时,必有 $M=0$.

证明 不妨设 $x(t)$有界且最终为正(最终为负时,可类似证之).若 $M>0$,则对足够大的 $T\geqslant t_0$,有

$$x(t)-\sum_{i=1}^{m}P_i(t)x(t-\tau_i)=y(t)\geqslant\frac{M}{2}>0,\quad t\geqslant T.$$

于是

$$x(t)\geqslant\sum_{i=1}^{m}P_i(t)x(t-\tau_i)+\frac{M}{2}\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{x(t-\tau_i)\}+\frac{M}{2},\quad t\geqslant T+\tau,$$

其中 $\tau=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\tau_i$,对任意 $t\geqslant T+\tau$,我们记

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{x(t-\tau_i)\}\overset{\triangle}{=}x(t-l_1),$$

且

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{x(t-\sum_{j=1}^{r}l_j-\tau_i)\}\overset{\triangle}{=}x(t-\sum_{j=1}^{r+1}l_j),\quad r=1,\cdots,N(t)-1,$$

其中 $l_j\in\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m\}$,$N(t)$满足

$$T\leqslant t-\sum_{j=1}^{N(t)}l_j\leqslant T+\tau.$$

很明显 $N(t)\geqslant\frac{t-T-\tau}{\tau}\to\infty(t\to\infty)$.由于

$$x(t-\sum_{j=1}^{r}l_j)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant m}\{x(t-\sum_{j=1}^{r}l_j-\tau_i)\}+\frac{M}{2}=x(t-\sum_{j=1}^{r+1}l_j)+\frac{M}{2},$$

所以归纳且由 $x(t)\geqslant y(t)$可得

$$x(t)\geqslant x(t-\sum_{j=1}^{N(t)}l_j)+N(t)\frac{M}{2}\geqslant\frac{1}{2}(N(t)+1)M\to\infty\ (t\to\infty).$$

此与 $x(t)$有界矛盾.

若 $M<0$,可类似地导出 $x(t)\to-\infty(t\to\infty)$,同样产生矛盾.

综上讨论可知 $M=0$.

§3 主要结论

我们分两种情况来进行讨论.

(Ⅰ) $\sum\limits_{i=1}^{m}|P_i(t)|\leqslant 1$.

定理 1 在方程(1)中,若(3)成立且

$$\int_{t_0}^{\infty}[a(s)+\sum_{j=1}^{n}Q_j(s)]ds=\infty,$$

则方程(1)的每一个非振动解当 $t\to\infty$ 时趋于 0.

证明 由于方程(1)的一个解的负号仍是方程(1)的解,因此不妨设 $x(t)$ 是方程(1)的一最终正解(若最终为负,可考虑 $-x(t)$). 引入变换(2),由方程(1)可知

$$y'(t) = -a(t)x(t) - \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)x(h_j(t)) \leqslant 0,$$

说明 $y(t)$ 最终单调递减. 不难证明 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = M$ 存在且 $M \geqslant 0$. 于是由引理 1 可知 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$ 存在且

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = L = M/(1 - \sum_{i=1}^{m} P_i) \geqslant 0.$$

若 $L>0$,则对充分大的 T,有

$$\frac{d}{dt}y(t) + a(t)\cdot\frac{L}{2} + \sum_{j=1}^{n} Q_j(t)\cdot\frac{L}{2} \leqslant 0, \quad t \geqslant T.$$

对上式从 T 到 t 积分得

$$y(t) - y(T) + \frac{L}{2}\int_T^t [a(s) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(s)]ds \leqslant 0.$$

由于 $y(t)$ 有界而积分 $\int_T^t [a(s) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(s)]ds$ 发散,这样上式产生矛盾. 由此可得 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = L = 0$. 证毕.

类似于定理 1 的证明可得下面的定理 2.

定理 2 在方程(1)中,若(3)成立且

$$\int_{t_0}^{\infty} [a(s) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(s)]ds < \infty,$$

则方程(1)的每一个非振动解当 $t\to\infty$ 时趋于一常数.

定理 3 在方程(1)中,若 $P_i(t) \geqslant 0, i = 1, \cdots, m, \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(t) = 1$,且

$$\int_{t_0}^{\infty} [a(s) + \sum_{j=1}^{n} Q_j(s)]ds = \infty,$$

则方程(1)振动.

证明 若结论不成立,则方程(1)存在最终正解 $x(t)$. 引入变换(2),由于 $y'(t) \leqslant 0$ 且 $y'(t)$ 不最终恒为零,所以 $y(t)$ 最终单调递减且 $y(t)$ 也不最终恒为零,从而 $y(t)$ 或者最终为正或者最终为负. 若 $y(t)$ 最终为负,则 $x(t)$ 有界,由引理 2 可知 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$,而 $y'(t) \leqslant 0$,这不可能. 从而说明 $y(t)$ 最终为正,因此

$$x(t) - \sum_{i=1}^{m} P_i(t)x(t-\tau_i) > 0$$

对充分大的 $t \geqslant T \geqslant t_0$ 成立. 于是类似于引理 2 的证明可推出

$$x(t) \geqslant M = \min\{x(s) \mid s \in [T, T+\tau_i], i = 1, \cdots, m\} > 0, t \geqslant T.$$

由于 $\lim\limits_{t\to\infty} h_j(t) = \infty$,故不妨设 $x(h_j(t)) \geqslant M, t \geqslant T, j = 1, \cdots, n$. 对方程(1)两边从 T 到 t 积分得

$$y(t) - y(T) + \int_T^t a(s)x(s)ds + \sum_{j=1}^{n}\int_T^t Q_j(s)x(h_j(s))ds = 0.$$

进而有

$$M\int_T^t[a(s)+\sum_{j=1}^{n}Q_j(s)]ds\leqslant y(T).$$

由积分发散可推出上式矛盾．故方程(1)振动．证毕．

注　定理1和2中的$P_i(t)$可以是变号系数，不过这类$P_i(t)$的极限为零($t\to\infty$)；定理1—3中我们仅要求$\lim\limits_{t\to\infty}h_j(t)=\infty, j=1,\cdots,n$．因此 $\sum\limits_{j=1}^{n}Q_j(t)x(h_j(t))$ 这一项可以是滞后型或超前型或混合型的．

定理4　在方程(1)中，令$\mathscr{J}=\{j|t-h_j(t)$大于或等于某一正常数，对充分大的t成立，$j=1,\cdots,n\}$，设$\mathscr{J}$非空且$\sigma=\min\{t-h_j(t)|j\in\mathscr{J}$，对充分大的$t\}<\infty$．若$P_i(t)\geqslant 0$，(3)成立且

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}\sum_{j\in\mathscr{J}}Q_j(s)ds>\frac{1}{e}\exp[-\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}a(s)ds],$$

则方程(1)振动．

定理4的证明与文[4]中定理4的证明类似，故略．

定理5　在方程(1)中，设$P_i(t)\equiv P_i$为常数，$i=1,\cdots,m$，$0\leqslant\sum\limits_{i=1}^{m}P_i<1$，$\sum\limits_{i=1}^{m}|P_i|<1$，$P_i<0, i=1,\cdots,m^*$，$P_i>0, i=m^*+1,\cdots,m$，$\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_m$；再设$a(t)$，$Q_j(t)$和$t-h_j(t)$都以$\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_m$为周期，即

$$a(t+\tau_i)=a(t),\ Q_j(t+\tau_i)=Q_j(t),\ t+\tau_i-h_j(t+\tau_i)=t-h_j(t),\quad i=1,\cdots,m, j=1,\cdots,n.$$

又设$\mathscr{J}$和σ定义如定理4且满足

$$\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}\sum_{j\in\mathscr{J}}Q_j(s)ds>\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{m}P_i}{e}\exp[-\liminf_{t\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}a(s)ds],$$

则方程(1)振动．

只要注意到

$$\begin{aligned}z(t)&=y(t)-\sum_{i=1}^{m}P_iy(t-\tau_i)\leqslant y(t)-\sum_{i=1}^{m^*}P_iy(t-\tau_{m^*})-\sum_{i=m^*+1}^{m}P_iy(t-\tau_{m^*})\\&=y(t)-\sum_{i=1}^{m}P_iy(t-\tau_{m^*})\leqslant(1-\sum_{i=1}^{m}P_i)y(t),\end{aligned}$$

定理5的证明与文[4]中的定理5类似，故略．

(Ⅱ)　$m=1, P_1(t)>1$.

在这一部分，放宽了文[4]中的限制，仅要求存在$j_0\in\{1,\cdots,n\}$，使$\int_{t_0}^{\infty}Q_{j_0}(s)ds=\infty$.

定理6　在方程(1)中，若$m=1$，存在常数P_1，P_2及$j_0\in\{1,\cdots,n\}$，使$1<P_1\leqslant P_1(t)\leqslant P_2$，且$\int_{t_0}^{\infty}Q_{j_0}(s)ds=\infty$，则方程(1)的每一个非振动解当$t\to\infty$时趋于$\infty$或$-\infty$.

证明　不妨设$x(t)$是方程(1)的最终正解，引入变换(2)，由(1)可得

$$y'(t)=-a(t)x(t)-\sum_{j=1}^{n}Q_j(t)x(h_j(t))\leqslant 0$$

其中等号不最终恒成立，从而 $y(t)$ 必最终为正或最终为负.

从能保证最终性质的足够大的 T 到 t 积分(1)两端得

$$y(t)-y(T)+\int_T^t a(s)x(s)ds+\int_T^t\sum_{j=1}^{n}Q_j(s)x(h_j(s))ds=0. \tag{4}$$

若 $y(t)>0$，则可推出 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=-\infty$，再由(4)及 $\int_T^t Q_{j_0}(s)ds$ 发散知 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=-\infty$.

若 $y(t)<0$，则

$$y(t)=x(t)-P_1(t)x(t-\tau_1)>-P_1(t)x(t-\tau_1),$$

从而有

$$x(t)>-\frac{y(t+\tau_1)}{P_1(t)}\geqslant-\frac{y(T+\tau_1)}{P_2}>0.$$

于是由(4)及 $\int_T^t Q_{j_0}(s)ds$ 发散可推出 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=-\infty$.

这样我们总有 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=\infty$. 又

$$x(t)>-\frac{y(t+\tau_1)}{P_1(t)}\geqslant-\frac{y(t+\tau_1)}{P_2}\to\infty\quad(t\to\infty),$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=\infty$. 证毕.

定理 7 在方程(1)中，假设定理 6 的条件均满足，令 $G=\{j\mid t-h_j(t)$ 最终小于或等于某一正常数，$j=1,\cdots,n\}$. 若 G 非空，$\tau_1>\sigma=\max\{t-h_j(t)\mid j\in G$，对充分大的 $t\}$，且

$$\frac{1}{P_2}\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+(\tau_1-\sigma)}\sum_{j\in G}Q_j(s)ds>\frac{1}{e}\exp\left[-\frac{1}{P_2}\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+(\tau_1-\sigma)}a(s)ds\right],$$

则方程(1)振动.

证明 若结论不成立，则方程(1)存在最终正解 $x(t)$，由定理 6 的证明可知

$$y'(t)\leqslant0,\ y(t)<0.$$

于是有

$$y(t)\geqslant y(t+\tau_1)>-P_1(t+\tau_1)x(t)\geqslant-P_2x(t)$$

进而可推出

$$y'(t)\leqslant-a(t)x(t)-\sum_{j\in G}Q_j(t)x(h_j(t))\leqslant\frac{1}{P_2}a(t)y(t)+\sum_{j\in G}\frac{1}{P_2}Q_j(t)y[t+(\tau_1-\sigma)].$$

即 $y'(t)-\frac{1}{P_2}a(t)y(t)-\frac{1}{P_2}\sum_{j\in G}Q_j(t)y[t+(\tau_1-\sigma)]\leqslant0$. 由文[7,4]中的引理及定理 7 的条件知上述不等式无最终负解，此与 $y(t)<0$ 矛盾. 故方程(1)振动. 定理 7 证毕.

定理 8 在方程(1)中，若定理 6 的条件均满足，$P_1(t)\equiv P_1$ 为常数，$a(t)$，$Q_j(t)$ 和 $t-h_j(t)$ 都是 τ_1—周期的$(j=1,\cdots,n)$，G 和 σ 的定义如定理 7，$\tau_1>\sigma$ 且

$$\frac{1}{p_1-1}\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+(1-\sigma)}\sum_{j\in G}Q_j(s)ds>\frac{1}{e}\exp\left[\frac{-1}{P_1-1}\liminf_{t\to\infty}\int_t^{t+(\tau_1-\sigma)}a(s)ds\right],$$

则方程(1)振动.

定理 8 的证明与文[4]中的定理 8 类似，故略.

参 考 文 献

[1] G. Ladas and Y. G. Sficas, *Oscillations of neutral delay differential equations*, Canad. Math. Bull., 29(1986), 438—445.

[2] M. K. Grammatikopoulos, E. A. Grove and G. Ladas, *Oscillations of first-order neutral delay differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 120(1986), 510—520.

[3] M. K. Grammatikopoulos, E. A. Grove and G. Ladas, *Oscillations and asymptotic behavior of neutral differential equations with deviating arguments*, Appl. Anal., 22(1986), 1—19.

[4] 李龙图，一阶中立型线性微分差分方程解的振动性，湘潭师范学院学报(自然版)，3(1989)，1—7.

[5] 徐远通、王其如，关于 M. K. Grammatikopoulos 等提出的一个猜想，科学通报，36:23(1991)，1834.

[6] 王其如，具有变号系数和多偏差的一阶中立型微分方程解的稳定性，烟台师范学院学报(自然版)，3(1993)，34—37.

[7] H. Onose, *Oscillatory properties of the first order nonlinear advanced and delayed differential inequalities*, Nonlinear Anal., 8(1984), 171—180.

Asymptotic Behavior and Oscillations of First Order Neutral Functional Differential Equations

Wang Qiru

(Dept. of Math., Luoyang Teachers College, Henan 471022)

Abstract

This paper discusses first order neutral differential equations with variable coefficients and several deviations. Asymptotic behavior of the nonoscillatory solutions of the equations are discussed. Sufficient conditions are obtained for the equations to be oscillatory. Some of them are cases of oscillatory coefficients.

Keywords neutral equation, asymptotic behavior, oscillation.