第15卷第4期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 4
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

一种几何定理机器证明的零维化方法*

吴 尽 昭
(中国科学院系统科学研究所数学机械化中心，北京 100080)

摘 要 本文对一类初等几何定理的证明给出了一种机械化方法，利用这种方法，可计算出一个由有限个素理想组成的集合，所有属于假设部分对应的某一扩域上的理想的素理想都在这个集合中出现并且可以挑选出来. 因而一个几何定理一般真确，当且仅当终结多项式属于全部的这种素理想，即对其不可约特征列的余式为零.

关键词 素理想，根理想，一般真确的几何定理，不可约待征列.
分类号 AMS(1991) 68U05/CCL TP399

1 引 言

几何定理证明机械化的思想，可追溯到十七世纪的笛卡儿时代，解析几何的出现，使得几何的问题可以用代数的方法来处理. 这样就避免了欧几里德那种几何证法所需的高度技巧. 但是，即使几何定理的证明完全化成了代数问题，仍还有一些难以克服的困难，例如代表几何关系的那些代数关系往往是杂乱无章的，而且计算量极大. 由于计算机的出现，繁杂的计算基本上已不成问题，因而关键的问题就是如何处理那些代数关系.

1960年，H. Gelernter, J. R. Hanson 与 D. W. Loveland 基于欧几里德的传统证法，给出了一种几何定理的机械化证明方法，但只能证明诸如“对边平行且相等的四边形是平行四边形”这类极其平凡的定理[2]. 另一方面，早在1950年，A. Tarski 就对初等几何判定问题给出了完整的机械化方法[4]. 但事实上，虽然经过 A. Seidenberg 等人的改进[3]，这种方法也远不是切实可行的，根本无法证明非平凡的几何定理. Hilbert 在他的经典名著《几何基础》一书中对一类几何定理不自觉地指出了机械化证法，但没有引起人们的注意. 直到1977年，吴文俊发明了一种进行几何定理机器证明的方法(吴方法)，这种方法十分有效，大量往往需要高度技巧和智能才能证明的所谓等式型的几何定理，用此方法能够很容易地得到证明. 它克服了 Hilbert 方法的范围过窄与 Tarski 方法的效率过低而成为机器证明中最成功的方法. 其基本思想是，首先，将几何定理的证明化为纯代数问题；其次，将定理的假设部分的代数关系式按一定的顺序加以整理和运算，判定定理的终结部分是否可从已整理过的代数关系式中推出；最后，编制程序在计算机上实施[6,7]. 在假设部分的代数关系式的整理与运算过程中，每次加入一个新的代数关系式时，这个过程必须重新进行[1].

本文对一类几何定理给出了一种机械化证法，应用这种方法，可获得一个由有限个不可约特征列组成的集合，我们所需要的全部不可约特征列都在这个集合中并且可以挑选出来，而不

* 1993年3月21日收到.

需重复地进行整序. 第二节是预备知识，罗列了一些下节需要用到的基本概念和结论而不加以证明；第三节是本文的中心部分，对于一类满足某一条件(当然，这一条件是否满足是可判定的)的几何定理，通过一个根理想的分解，给出了判定这种几何定理是否一般真确的机械化方法；最后简单地讨论了多项式组的特征列及非退化条件的选取.

2 预备知识

假设读者熟悉交换代数及吴方法中的基本概念和结论，例如，多项式、环、域、理想、素理想、根理想、维数以及零点、母点、类、序、升列、初式、特征列、不可约特征列与一般真确的几何定理等概念以及有关结果. 于此，读者可参阅[5,7]. 下面仅列出需要直接使用的结论.

设 R 是个可计算的 UFD，K 是其商域，$K[x_1,\cdots,x_n]$是域 K 上的以 $x_1,\cdots,x_n$ 为变元的多项式环.

定理 2.1 有一机械化方法可在有限步内将 $K[x_1,\cdots,x_n]$中的多项式进行因式分解.

定理 2.2 设 α 是 K 上的代数元，则有一机械化方法在有限步内可将 $K(\alpha)$上的以 x 为变元的多项式环 $K(\alpha)[x]$中的多项式进行因式分解.

假定变元 $x_1,\cdots,x_n$ 的序已确定，$A_1,\cdots,A_k\in K[x_1,\cdots,x_n]$是一个升列. $I_1,\cdots,I_k$ 分别是 $A_1,\cdots,A_k$ 的初式，对任意的多项式 $g\in K[x_1,\cdots,x_n]$，首先令 g 对 A_k 关于 A_k 的主变元作伪除法，获得余式 R_{k-1}，这样一直作下去，最后，R_1 对 A_1 关于 A_1 的主变元作伪除法，余式为 R_0. 显然，存在非负整数 $s_1,\cdots,s_k$ 与多项式 $Q_1,\cdots,Q_k\in K[x_1,\cdots,x_n]$，使得

$$I_1^{s_1}\cdots I_k^{s_k}g = Q_1A_1 + \cdots + Q_kA_k + R_0,$$

并且 A_j 的主变元在 R_0 中的次数小于它在 A_j 中的次数($j=1,\cdots,k$). 我们记余式 R_0 为 prem $(g,A_k,\cdots,A_1)$.

定理 2.3 (整序原理) 令 $\Sigma=\{h_1,\cdots,h_m\}$是 $K[x_1,\cdots,x_n]$中的一个有限非空的多项式集，I 是 Σ 生成的 $K[x_1,\cdots,x_n]$中的理想. 则有一机械化方法可在有限步内获得一升列 C，使得或者 C 仅由一个 $K\cap I$ 中的多项式组成；或者 $C=\{A_1,\cdots,A_k\}(k\geqslant 1)$，$A_1$ 的类大于零，$A_1,\cdots,A_k\in I$，并且 perm$(h_i,A_k,\cdots,A_1)=0(i=1,\cdots,m)$.

其实，上述升列 C 的获取只需按一定的顺序重复地作伪除法，而且这一过程最后终止. 详细证明请参考[7].

3 几何定理的一般真确性

设 (S)是个等式型的几何定理，$h_1,\cdots,h_m\in K[X]$是(S)的假设多项式部分，$g\in K[X]$是(S)的终结部分，其中 $X=(x_1,\cdots,x_n)$. 正确地选取参变元以及改变变元次序，可将 X 重新记为(U,Y)，其中 $U=(u_1,\cdots,u_{n-k})$是参变元，$Y=(y_1,\cdots,y_k)$是相关变元，并且通过整序而获得的$\{h_1,\cdots,h_m\}$的升列中有 k 个多项式 $A_1,\cdots,A_k$:$A_j\in K[U,y_1,\cdots,y_j]$，$j=1,\cdots,k$. 又设 $I_1,\cdots,I_k$ 分别为 $A_1,\cdots,A_k$ 的初式，以下我们只研究升列 $A_1,\cdots,A_k$ 满足下面条件(*)的几何定理.

(*) $A_1,\cdots,A_j$ 在 $K(U)[y_1,\cdots,y_j]$中生成的理想是零维的($j=1,\cdots,k$).

事实上，许多定理满足这一条件，如果一个几何定理不满足这个条件，说明这个几何定理需要进一步加以研究探讨.

设 J 为 $h_1,\cdots,h_k$ 在 $K(U)[Y]$中生成的理想，用 Rad(J)表示 J 的根理想，易见，J 是 $K(U)[Y]$中的零维理想.

3.1 根理想 Rad(J)的素分解

视 $A_j, j=1,\cdots,k$，为 $K(U)[Y]$中的多项式，我们首先分解 A_1：$A_1=\prod_{i_1=1}^{s_1} p_{i_1}^{r_{i_1}}$，其中 s_1,r_{i_1}是自然数，p_{i_1}是 $K(U)[y_1]$中的不可约多项式$(i_1=1,\cdots,s_1)$.

令 $P_{i_1}=\{f\in K(U)[Y]:\operatorname{prem}(f,p_{i_1})=0\}$；此时 $i_1=1,\cdots,s_1$.

模 P_{i_1}分解 $A_2(i_1=1,\cdots,s_1)$：$A_2=\prod_{i_2=1}^{s_2} p_{i_1,i_2}^{r_{i_2}}(\operatorname{mod}P_{i_1})$，其中 s_2,r_{i_2}是自然数，$p_{i_1,i_2}\in K(U)[y_1,y_2]$模 P_{i_1}不可约，$(i_2=1,\cdots,s_2)$.

对于 $i_1=1,\cdots,s_1$，去除使得 $C_1A_2=1(\operatorname{mod}P_{i_1})$ $(C_1\in K(U)[y_1])$成立的全部 P_{i_1}，记余下的 P_{i_1}的下标集为 S_1.

令 $P_{i_1,i_2}=\{f\in K(U)[Y]:\operatorname{prem}(f,p_{i_1,i_2},p_{i_1})=0\}$，此时 $i_1\in S_1,i_2=1,\cdots,s_2$.

这样一直作下去，最后，

模 $P_{i_1,\cdots,i_{k-1}}((i_1,\cdots,i_{k-2})\in S_{k-2},i_{k-1}=1,\cdots,s_{k-1})$分解 A_k：

$$A_k=\prod_{i_k=1}^{s_k} p_{i_1,\cdots,i_k}^{r_{i_k}}(\operatorname{mod}P_{i_1,\cdots,i_{k-1}}),$$

其中 s_k,r_{i_k}是自然数，$p_{i_1,\cdots,i_k}$模 $P_{i_1,\cdots,i_{k-1}}$不可约.

去除使得 $C_{k-1}A_k=1(\operatorname{mod}P_{i_1,\cdots,i_{k-1}})$ $(C_{k-1}\in K(U)[y_1,\cdots,y_{k-1}])$成立的所有 $P_{i_1,\cdots,i_{k-1}}$，记余下的 $P_{i_1,\cdots,i_{k-1}}$的下标集为 $S_{k-1}(i_k=1,\cdots,s_k)$.

令 $P_{i_1,\cdots,i_k}=\{f\in K(U)[Y]:\operatorname{prem}(f,p_{i_1,\cdots,i_k},\cdots,p_{i_1})=0\}$，此时$(i_1,\cdots,i_{k-1})\in S_{k-1},i_k=1,\cdots,s_k$.

记经过以上步骤最后所获得的全部 $P_{i_1,\cdots,i_k}$的下标集为 S.

容易证明，对于 $j\geqslant 2$，不可能对所有的 $P_{i_1,\cdots,i_{j-1}}$都存在 $C_{j-1}\in K(U)[y_1,\cdots,y_{j-1}]$使得 $C_{j-1}A_j=1(\operatorname{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}})$. 否则，$A_1,\cdots,A_j$ 将无公共零点. 与条件(*)矛盾. $A_1,\cdots,A_j$ 作为 $K(U)[y_1,\cdots,y_j]$中的多项式有无穷多个零点，也与条件(*)矛盾.

易见，$P_{i_1,\cdots,i_j}$都是素理想，并且 $P_{i_1,\cdots,i_k}((i_1,\cdots,i_k)\in S)$是零维的.

定理 3.1 升列 $A_1,\cdots,A_k$ 满足条件(*)当且仅当对任意的 $j\geqslant 2,(i_1,\cdots,i_{j-1})\in S_{j-1},A_j\not\equiv 0(\operatorname{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}})$.

证明 视 A_j 为以其主变元 y_j 为变元的一元多项式. 假设存在这样的 $P_{i_1,\cdots,i_{j-1}}$使得 $A_j=0(\operatorname{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}})$，则 $P_{i_1,\cdots,i_{j-1}}$的零点都是 A_j 中所有系数的零点，显然与条件(*)矛盾；反之，可以证明存在 A_j 中一个非常数项的系数 c，使得对任意满足以上条件的 $i_1,\cdots,i_{j-1},c\not\equiv 0(\operatorname{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}})$. 因此由 $A_1,\cdots,A_{j-1}$的零点可获得有限个 $A_1,\cdots,A_j$ 的零点. 从而证明了 $A_1,\cdots,A_j$ 生成 $K(U)[y_1,\cdots,y_j]$中的零维理想.

下面证明属于 Rad(J)的每个素理想一定是某个 $P_{i_1,\cdots,i_k}((i_1,\cdots,i_k)\in S)$.

引理 3.2 若 $S\ni(i_1,\cdots,i_k)\neq(j_1,\cdots,j_k)\in S$，则 $P_{i_1,\cdots,i_k}\neq P_{j_1,\cdots,j_k}$.

证明 设 $i_1=j_1,\cdots,i_{t-1}=j_{t-1},i_t\neq j_t,t\in\{1,\cdots,k\}$. 若 $P_{i_1,\cdots,i_k}=P_{j_1,\cdots,j_k}$，由于 $p_{j_1,\cdots,j_t}\in P_{i_1,\cdots,i_k}$，故存在自然数 $q_1,\cdots,q_t$ 以及 $Q_1,\cdots,Q_t\in K(U)[y_1,\cdots,y_t]$，使得

$$T_t^{q_t}\cdots T_1^{q_1}p_{j_1,\cdots,j_t}=Q_tp_{i_1,\cdots,i_t}+\cdots+Q_1p_{i_1},$$

其中 $T_1,\cdots,T_t$ 分别为 $p_{i_1},\cdots,p_{i_1,\cdots,i_t}$ 的初式，于是，

$$T_t^{q_t}\cdots T_1^{q_1}p_{j_1,\cdots,j_t}=Q_tp_{i_1,\cdots,i_t}(\mathrm{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}}).$$

但 $T_t^{q_t}\cdots T_1^{q_1}\notin P_{j_1,\cdots,j_{t-1}}=P_{i_1,\cdots,i_{t-1}}$. 从而 $p_{j_1,\cdots,j_t}$ 是 $p_{i_1,\cdots,i_t}$ 模 $P_{i_1,\cdots,i_{t-1}}$ 意义下的因子，因此 $p_{i_1,\cdots,i_t}=p_{j_1,\cdots,j_t}$，但 $i_t\neq j_t$，矛盾.

引理 3.3 设 P 是 $K(U)[Y]$ 中的非平凡素理想且 $J\subseteq P$，则存在 $(i_1,\cdots,i_k)\in S$，使得 $P=P_{i_1,\cdots,i_k}$.

证明 因为 $A_1=\prod_{i_1=1}^{e_1}p_{i_1}^{r_{i_1}}\in J\subseteq P$，故存在 i_1 使得 $p_{i_1}\in P$. 易见不存在 $C_1\in K(U)[y_1]$ 使得 $C_1A_2=1(\mathrm{mod}P_{i_1})$. 否则的话，$1\in P$.

假设 $p_{i_1},\cdots,p_{i_1,\cdots,i_t}\in P$，$t\geqslant 1$，且不存在 $C_t\in K(U)[y_1,\cdots,y_t]$ 使得 $C_tA_{t+1}=1(\mathrm{mod}P_{i_1,\cdots,i_t})$. 容易证明 $P_{i_1,\cdots,i_t}\subseteq P$. 又因为 $P\supseteq J\ni A_{t+1}=\prod_{i_{t+1}=1}^{e_{t+1}}p_{i_1,\cdots,i_{t+1}}^{r_{i_{t+1}}}(\mathrm{mod}P_{i_1,\cdots,i_t})$，故存在 i_{t+1} 使得 $p_{i_1,\cdots,i_{t+1}}\in P$，显然不存在 $C_{t+1}\in K(U)[y_1,\cdots,y_{t+1}]$，使得 $C_{t+1}A_{t+2}=1(\mathrm{mod}P_{i_1,\cdots,i_{t+1}})$. 否则，$1\in P$.

这样就证明了存在 $(i_1,\cdots,i_k)\in S$，使得 $p_{i_1},\cdots,p_{i_1,\cdots,i_k}\in P$. 因此，$P_{i_1,\cdots,i_k}\subseteq P$. 由于 $P_{i_1,\cdots,i_k}$ 是零维的，故是极大的，从而 $P_{i_1,\cdots,i_k}=P$.

根据这两个引理，知道属于 $\mathrm{Rad}(J)$ 的每一素理想一定是某个 $P_{i_1,\cdots,i_k}$，$(i_1,\cdots,i_k)\in S$. 去除使得 $J\subsetneq P_{i_1,\cdots,i_k}$ 的所有的 $P_{i_1,\cdots,i_k}$. 记余下的全部这种素理想的下标的集合为 S_0. 显然，$J\subsetneq P_{i_1,\cdots,i_k}$ 当且仅当存在 $i\in\{1,\cdots,m\}$ 使得 $\mathrm{prem}(h_i,p_{i_1,\cdots,i_k},\cdots,p_{i_1})\neq 0$. 因此是可判定的. 于是有

定理 3.4 $\mathrm{Rad}(J)=\bigcap_{(i_1,\cdots,i_k)\in S_0}P_{i_1,\cdots,i_k}$.

这样，就获得了根理想 $\mathrm{Rad}(J)$ 的素分解，且其中的每一素理想都以不可约特征列表示.

推论 3.5 设 $I_1,\cdots,I_k$ 分别为 $A_1,\cdots,A_k$ 的初式，对任意的 $j\geqslant 2$，$(i_1,\cdots,i_{j-1})\in S_{j-1}$，若 $I_j\neq 0(\mathrm{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}})$，则 $S_0=S$. 即 $P_{i_1,\cdots,i_k}$，$(i_1,\cdots,i_k)\in S$，恰好是属于 $\mathrm{Rad}(J)$ 的全部素理想.

证明 只需证明，对任意的 $(i_1,\cdots,i_k)\in S$，$J\subseteq P_{i_1,\cdots,i_k}$.

首先，$A_1,\cdots,A_k\in P_{i_1,\cdots,i_k}$. 事实上 $A_1=\prod_{i_1=1}^{e_1}p_{i_1}^{r_{i_1}}\subseteq J\in P_{i_1,\cdots,i_k}$，令 $(a_1,\cdots,a_k)$ 是 $P_{i_1,\cdots,i_k}$ 的一个母点，则对 $j\geqslant 2$，由于 $A_j=\prod_{i_j=1}^{e_j}p_{i_1,\cdots,i_j}^{r_{i_j}}(\mathrm{mod}P_{i_1,\cdots,i_{j-1}})$，故 $A_j(a_1,\cdots,a_j)=0$，亦即 $A_j\in P_{i_1,\cdots,i_k}$.

显然，对于 $f\in J$，存在自然数 $v_1,\cdots,v_k$ 与 $Q_1,\cdots,Q_k\in K(U)[Y]$，使得

$$I_1^{v_1}\cdots I_k^{v_k}f=Q_kA_k+\cdots+Q_1A_1.$$

因而 $I_1^{v_1}\cdots I_k^{v_k}f\in P_{i_1,\cdots,i_k}$. 但由假设条件知：$I_1^{v_1}\cdots I_k^{v_k}\notin P_{i_1,\cdots,i_k}$，因此 $f\in P_{i_1,\cdots,i_k}$.

3.2 一般真确的几何定理

首先给出一个几何定理(S)一般真确的充分必要条件.

定理 3.6 几何定理(S)是一般真确的当且仅当 $g\in \mathrm{Rad}(J)$.

证明 设 I 是 $h_1,\cdots,h_m$ 在 $K[U,Y]$中生成的理想,则若(S)是一般真确的,那么存在正整数 t 和 $s\in K[U]$,使得 $sg^t\in I$. 故 $g^t\in J$,$g\in\mathrm{Rad}(J)$;反之,若 $g\in\mathrm{Rad}(J)$,则存在正整数 r,使得 $g^r\in J$,因而存在 $v\in K[U]$,$vg^r\in I$,于是(S)是一般真确的.

由上面的讨论知,有一机械化方法将 $\mathrm{Rad}(J)$分解成素理想的交,并且这些素理想以不可约特征列的形式给出,于是,由定理 3.6,(S)是一般真确的当且仅当 g 对每个不可约特征列的余式为零.

算法 3.7 设(S)是一个等式型几何定理,$\{h_1,\cdots,h_m\}\in K[X]$是假设部分多项式,$g\in K[X]$是终结多项式. 判定(S)是否一般真确的.

步 1 选取参变元 U 与相关变元 Y,对给定的序将$\{h_1,\cdots,h_m\}$整序而获得升列 $A_1,\cdots,A_k$;

步 2 视 $A_1,\cdots,A_k$ 为 $K(U)[Y]$中的多项式,对 $j\geqslant 1$ 作 A_j 的分解(见 3.1 节),同时判定 A_j 是否满足条件(*)(见定理 3.1). 若条件(*)成立,则进行下一步;

步 3 对于$(i_1,\cdots,i_k)\in S$. 去除使得 $J\subseteq P_{i_1,\cdots,i_k}$成立的所有素理想 $P_{i_1,\cdots,i_k}$而获得下标集 S_0(见 3.1 节);

步 4 对于每个素理想 $P_{i_1,\cdots,i_k}$,$(i_1,\cdots,i_k)\in S_0$,若 $g\in P_{i_1,\cdots,i_k}$,则(S)是一般真确的,否则,(S)是非一般真确的.

在步 2 中,我们也可同时判定 A_j 的初式 $I_j(j\geqslant 2)$是否满足推论 3.6 中的条件,如果满足的话,那么步 3 可以省略. 因为此时 $S_0=S$.

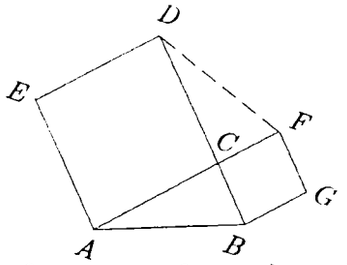
4 例子及几点说明

例 3.8 设 ABC 是个三角形,M 是 AB 的中点. 在 AC 和 BC 的两边分别作两个正方形 $ACDE$ 与 $BCFG$,证明 $DF=2CM$(见图).

令 $A=(u_1,0)$,$B=(u_2,u_3)$,$C=(0,0)$,$D=(0,u_1)$,$F=(y_1,y_2)$,$M=(y_3,y_4)$. 变元的序为 $u_1<u_2<u_3<y_1<y_2<y_3<y_4$,则有

$$h_1=y_2^2+y_1^2-u_2^2-u_3^2;\quad h_2=u_3y_2+u_2y_1;\quad h_3=2y_3-u_1-u_2;\quad h_4=2y_4-u_3;$$

$$g=4y_4^2+4y_3^2-y_2^2+2u_1y_2-y_1^2-u_1^2.$$



经过整序,我们获得一个升列:

$$A_1=(u_2^2+u_3^2)y_1^2-u_3^4-u_2^2u_3^2;$$

$$A_2=u_3y_2+u_2y_1;$$

$$A_3=2y_3-u_1-u_2;$$

$$A_4=2y_4-u_3.$$

按以上算法,最后获得两个分别以$\{y_1-u_3,y_2+u_2,2y_3-u_1-u_2,2y_4-u_3\}$,$\{y_1+u_3,y_2-u_2,2y_3-u_1-u_2,2y_4-u_3\}$为特征列的素理想 P_1 与 P_2. 容易计算,$g\in P_1$,但 $g\notin P_2$. 从而这个几何定理是非一般真确的. 此外,这也表明对某些画法,这一定理正确,但对另外的画法却是不正确的.

对于上述方法，有几点值得说明一下.

关于非退化条件，令在上述计算过程中所有以分母出现的 $K[U]$ 中的多项式不等于零，即获得了一组非退化条件；

设 $A_j(j=1,\cdots,k)$ 中主变元的次数为 n_j，令 $N=\max\{n_1,\cdots,n_k\}$，则容易看出，$P_{i_1,\cdots,i_k}((i_1,\cdots,i_k)\in S)$ 的个数不超过 N^k.

最重要的是，一般来说，一组多项式经整序后所获得的升列不是唯一的，如果按照某个序最后得到的升列不满足条件(*)，是否可以再求另外一个升列(例如通过改变变元序的方法)；这个升列满足条件(*). 这一问题还需进一步研究探讨.

参 考 文 献

[1] S. C. Chou, X. S. Gao, *Zero structure decompositions and the dimension theorem*, MM-Res. Preprint, 5(1990), 82—87.

[2] H. Gelernter, J. R. Hanson, D. W. Loveland, *Empirical explorations of the geometry-theorem proving machine*, Proc. West. Joint Computer Conf., 1960, 143—147.

[3] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Annals of Math., 60(1954), 365—371.

[4] A. Tarski, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[5] B. L. Van Der Waerden, *Algebra*, Auflage 4, Springer Verlag, 1963.

[6] Wu Wen-tsün, *Basic principles of mechanical theorem proving in geometries*, Journal of Automated Reasoning, 2(4)(1986), 221—252.

[7] 吴文俊，几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)，科学出版社，1984.

A Zero-Dimensional Method for Mechanical Geometry Theorm Proving

Wu Jinzhao

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Bejing 100080)

Abstract

A mechanical method for proving a class of elementary geometry theorems is presented. By this method, we can obtain a set of finite prime ideals. All the prime ideals associated with the ideal generated by the hypothesis polynomials over an extension field appear in this set and can be picked out. Therefore, a geometry theorem is generally true, if and only if the conclusion polynomial belongs to each such prime ideal, i.e., its remainders to each irreducible characteristic set are zero.

Keywords prime ideal, radicals, generally true geometry theorems, irreducible characteristic sets.