关于动力系统$\frac{du}{dt}=F(u)$的锥性质的几点注记*

杨 力 华

（湖南师范大学数学系，长沙 410006）

摘 要 本文对[1]中动力系统$\frac{du}{dt}=F(u)$的锥性质定理提出了几点注记，说明定理中的锥$\mathscr{C}_\gamma$与通常锥的异同.

关键词 锥性质，动力系统.

分类号 AMS(1991) 58F/CCL O189.3

§0 引 言

[1]中给出了动力系统$\frac{du}{dt}=F(u)$的锥性质定理如下：

定理A 设H是一个Hilbert空间，$H=PH\oplus QH$，其中P是H上一个投影算子，$Q=I-P$（I为恒同算子），设$u(t):[0,+\infty)\to H$连续，记$p=p(t)=Pu(t)$，$q=q(t)=Qu(t)$，又设下面的条件满足：

(a) 若存在$t_0\geqslant 0$使得$u(t_0)=0$，则$u(t)\equiv 0$，$\forall\ t\geqslant t_0$；

(b) 存在正常数$\Lambda,\lambda,\mu_1,\mu_2,\gamma$合乎$\Lambda-\lambda>\frac{\mu_1\gamma^2+\mu_2}{\gamma}$使得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|p|^2\geqslant-\lambda|p|^2-\mu_1|p||q|, \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|q|^2\leqslant-\Lambda|q|^2+\mu_2|p||q|, \tag{2}$$

对$\forall\ t\geqslant 0$：$|q(t)|\geqslant\gamma|p(t)|$成立，其中$|\cdot|$表$H$中范.

记$\mathscr{C}_\gamma\overset{\triangle}{=}\{v\in H\mid|Qv|\leqslant\gamma|Pv|\}$为$H$中一抽象锥，我们有

(i) 若$\exists\ t_0\geqslant 0$，使得$u(t_0)\in\mathscr{C}_\gamma$，则$u(t)\in\mathscr{C}_\gamma$，$\forall\ t\geqslant t_0$；

(ii) 若$u(t)\overline{\in}\mathscr{C}_\gamma$，$\forall\ t\geqslant 0$，则$u(t)$依指数衰减：

$$\begin{cases}|Qu(t)|\leqslant|Qu(0)|\exp(-\nu t)\\ |u(t)|\leqslant\dfrac{(1+\gamma^2)^{1/2}}{\gamma}|u(0)|\exp(-\nu t)\end{cases},\quad\forall\ t\geqslant 0 \tag{3}$$

其中$\nu=\Lambda-\frac{\mu_2}{\gamma}>0$.

* 1992年7月21日收到. 94年5月11日收到修改稿.

本文对这一重要定理给出几点注记.

§1 几点注记

注记 1 去掉定理 A 的条件(a),定理 A 的结论仍成立.证明不难,略.

注记 2 一般而言,$\mathscr{C}_\gamma$ 不是实 Banach 空间中通常意义下的锥[2].反例如下:

例 设 $H=R^3, Px\overset{\triangle}{=}(x_1,x_2,0), x\overset{\triangle}{=}(x_1,x_2,x_3)\in H, \gamma>0$,易明此时 $\mathscr{C}_\gamma$ 不是通常锥.甚至不是凸集,也不是有限个通常锥的并.

注记3 如果 $\dim PH=1$,则$\forall\ \gamma>0$,$\mathscr{C}_\gamma$ 是关于原点对称且均以原点为顶点的两个通常锥之并,换言之,$\forall\ u_0\in\mathscr{C}_\gamma\backslash\{\theta\}$,记

$$\mathscr{C}_\gamma(u_0)\overset{\triangle}{=}\{u\in\mathscr{C}_\gamma \mid tu+(1-t)u_0\in\mathscr{C}_\gamma\backslash\{\theta\},\ \forall\ t\in[0,1)\},$$

则 $\mathscr{C}_\gamma(u_0)$,$\mathscr{C}_\gamma(-u_0)$是通常意义下的锥,且

$$\mathscr{C}_\gamma=\mathscr{C}_\gamma(u_0)\cup\mathscr{C}_\gamma(-u_0),\ \mathscr{C}_\gamma(u_0)\cap\mathscr{C}_\gamma(-u_0)=\{\theta\},\ \mathscr{C}_\gamma(-u_0)=-\mathscr{C}_\gamma(u_0)$$

而且,$\forall\ u\in\mathscr{C}_\gamma$,$u\in\mathscr{C}_\gamma(u_0)$等价于$(Pu)(Pu_0)\geqslant 0$,进一步,对$\forall\ v_0\in\mathscr{C}_\gamma(u_0)\backslash\{\theta\}$有

$$v_0\in\mathscr{C}_\gamma(u_0)\Leftrightarrow u_0\in\mathscr{C}_\gamma(v_0)\Leftrightarrow(Pu_0)(Pv_0)>0\Leftrightarrow\mathscr{C}_\gamma(v_0)=\mathscr{C}_\gamma(u_0)$$

注记4 在 $\dim PH=1$时,定理 A 有如下更细致的描述:

定理1 设定理 A 的条件全满足且 $\dim PH=1$,则

(i) 若$\exists\ t_0\geqslant 0$,使得 $u(t_0)=0$,则 $u(t)\equiv 0,\ \forall\ t\geqslant t_0$;

(ii) 若$\exists\ t_0\geqslant 0$,使得 $u(t_0)\in\mathscr{C}_\gamma\backslash\{\theta\}$,则 $u(t)\in\mathscr{C}_\gamma(u(t_0)),\ \forall\ t\geqslant t_0$;

(iii) 若 $u(t)\overline{\in}\mathscr{C}_\gamma,\ \forall\ t\geqslant 0$,则 $u(t)$依指数级衰减到0,即(3)成立.

参 考 文 献

[1] R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, New York Inc., 1988, 408—413.

[2] V. Hutson and J. S. Pym, *Applications of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press Inc. (London) Ltd., 1980, p212.