第15卷 增刊
1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 Supp
Nov. 1995

一类二阶非线性常微分方程非线性边界条件的两点边值问题*

杨 作 东
(河南师范大学数学系，新乡 453002)

摘 要 本文讨论了一类二阶非线性常微分方程之具有线性边界条件的和具有非线性边界条件的两点边值问题解的存在性.

关键词 非线性常微分方程，两点边值问题，存在性.
分类号 AMS(1991) 34B15/CCL O175.14

§1 引 言

边值问题：

$$\begin{cases} (|y'|^{p-2}y')' = f(t,y,y'), & (1.1)\\ y(a) = A, \quad y(b) = B & (1.2)\end{cases}$$

是以反应扩散及非牛顿流体理论等许多物理问题为背景提出的数学模型[1-3]，p-Laplace 方程

$$\begin{cases}\operatorname{div}(|Dy|^{p-2}Dy) = f(x,y,Dy),\\ y|_{\partial\Omega} = 0\end{cases}$$

研究球对称解时所提出的方程[4-5]. 当 $p>1$ 时，且 f 不依赖于 y' 时，M. N. Pino 等[6]证明了(1.1)，(1.2)存在着连续的弱解. 当 f 依赖于 y' 时，我们需要寻求光滑度更高的解，故[6]中的方法不能应用. 为了克服这一困难，本文假设方程(1.1)上、下解存在的条件下证明了边值问题(1.1)，(1.2)解的存在性. 在第三节证明了方程(1.1)和逐一满足非线性边界条件：

$$g(y(a),y(b),y'(a),y'(b)) = 0, \quad h(y(a)) = y(b), \tag{1.3}$$

$$p(y(a),y'(a)) = 0 = q(y(a),y'(a),y(b),y'(b)), \tag{1.4}$$

$$r(y(b),y'(b)) = 0 = w(y(a),y'(a),y(b),y'(b)) \tag{1.5}$$

解的存在性. 当 $p=2$ 时，已经取得了丰硕的成果[7-9].

§2 简单边界条件

本节证明了边值问题(1.1)，(1.2)解的存在性.

定义 若存在 $\alpha(t)\in C^1[a,b]$，$\varphi_p(\alpha')\in C^1(a,b)$ 使得：$(\varphi_p(\alpha'))'\geqslant f(t,\alpha,\alpha')$，则称 $\alpha(t)$ 为方程(1.1)在 $[a,b]$ 上的下解，其中 $\varphi_p(y)=|y|^{p-2}y$，$p>1$；若存在 $\beta(t)\in C^1[a,b]$，$\varphi_p(\beta')\in C^1(a,$

* 1992年8月16日收到. 94年3月收到修改稿. 河南省教委资助项目.

b)使得：$(\varphi_p(\beta'))' \leqslant f(t,\beta,\beta')$，则称 $\beta(t)$ 为方程(1.1)在$[a,b]$上的上解.

记：$E = \{(t,y) \mid a \leqslant t \leqslant b, \alpha(t) \leqslant y \leqslant \beta(t), \alpha,\beta \in C^1[a,b]\}$.

为简单计，以 $H_i(i=1,2)$表示如下条件：H_1：$f(t,y,z)$于域 $\Omega=\{(t,y,z) \mid a\leqslant t\leqslant b, -\infty < y,z < +\infty\}$上连续；$H_2$：$f(t,y,z)$在 E 上满足 Nagumo 条件：存在函数 $\psi:[a,\infty)\to(a,\infty)$，使 $\frac{1}{\psi}$ 在$[a,\infty)$上任何有界区间上可积，且对$\forall\ (t,y)\in E$ 和$-\infty<z<+\infty$有 $|f(t,y,z)|\leqslant\psi(|z|)$. ψ 满足：

$$\int^{\infty}\varphi_p^{-1}(u)/\psi(\varphi_p^{-1}(u))du = \infty,$$

其中 φ_p^{-1} 为 φ_p 的反函数.

引理 2.1 设条件 H_1 成立，若存在常数 $M>0$，使得当$(t,y,z)\in\Omega$ 有 $|f(t,y,z)|\leqslant M$. 则边值问题(1.1)，(1.2)至少存在一个解.

证明 求(1.1)和(1.2)的解等价于求 $y\in C^1[a,b]$使满足：

$$y = A + \int_a^t \varphi_p^{-1}(c - \int_s^b f(z,y,y')dz)ds, \tag{2.1}$$

其中 c 满足：

$$B - A = \int_a^b \varphi_p^{-1}(c - \int_s^b f(z,y,y')dz)ds. \tag{2.2}$$

我们断言，当积分方程(2.1)有解时，常数 c 存在且唯一. 设 $H(x) = \int_a^b \varphi_p^{-1}(x - Q(s))ds$. 其中 $Q(s) = \int_s^b f(z,y,y')ds$. 由假设条件 $|f|\leqslant M$ 便可推出 $|Q(s)|\leqslant M(b-s)$，因此 $H(x)/(b-a)$ 在 $\varphi_p^{-1}(x-M(b-a))$与 $\varphi_p^{-1}(x+M(b-a))$之间，由 H 的连续性和介值定理得：存在 $c\in(-\infty,+\infty)$使得 $H(c)=B-a$. 另外由 φ_p^{-1} 严格增可得 c 唯一.

下面分两种情形来证积分方程(2.1)有解

(i) 当 $1<p\leqslant 2$ 时，定义算子 $N: C_B^1[a,b]=\{y\in C^1[a,b], y(a)=A, y(b)=B\}\to C_B^1[a,b]$. $Ny = A + \int_a^t \varphi_p^{-1}(c - \int_s^b f(z,y,y')dz)ds$，其中 c 满足(2.2). 于是只须证明 N 存在不动点.

首先证 $N: C_B^1[a,b]\to C_B^1[a,b]$是连续的. 设在$[a,b]$上一致有 $y_n\to y, y_n'\to y'$，往证一致有：$Ny_n\to Ny, (Ny_n)'(t)\to(Ny)'(t)$. 此时有：

$$Ny_n - Ny = \int_a^t [\varphi_p^{-1}(c_n - \int_s^b f(z,y_n,y_n')dz) - \varphi_p^{-1}(c - \int_s^b f(z,y,y')dz)]ds, \tag{2.3}$$

$$(Ny_n)'(t) - (Ny)'(t) = \varphi_p^{-1}(c_n - \int_t^b f(z,y_n,y_n')dz) - \varphi_p^{-1}(c - \int_t^b f(z,y,y')dz). \tag{2.4}$$

注意到：

$$\int_a^b [\varphi_p^{-1}(c_n - \int_s^b f(z,y_n,y_n')dz) - \varphi_p^{-1}(c - \int_s^b f(z,y,y')dz)]ds = 0. \tag{2.5}$$

若能证 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. 则从(2.3)，(2.4)以及 φ_p^{-1} 的连续性可得 N 是连续的. 注意到(2.5)和中值定理得 $\varphi_p^{-1}(c_n - \int_{\eta_n}^b f(z,y_n,y_n')dz) = \varphi_p^{-1}(c - \int_{\eta_n}^b f(z,y,y')dz)$，$\eta_n\in[a,b]$. 因 $y_n\to y, y_n'\to y'$，故

$$\lim_{n\to\infty} c_n = c.$$

往证 N 全连续. 先证对$\forall\ y \in C_B^1$,存在 N^* 有 $|c_y| \leqslant N^*$. 因

$$B - A = \int_a^b \varphi_p^{-1}(c_y - \int_s^b f(z,y,y')dz)ds,$$

利用中值定理: $\varphi_p^{-1}(c_y - \int_\xi^b f(z,y,y')dz) = (B-A)/(b-a)$, 于是有 $|c_y| \leqslant M(b-a) + \varphi_p(\frac{B-A}{b-a}) = N^*$. 其次证 NC_B^1 在 C_B^1 中是有界的. 注意 φ_p 为奇函数,从而 φ_p^{-1} 也是奇函数,则有 $|Ny| \leqslant |A| + M_1(b-a)$, $|(Ny)'(t)| \leqslant M_1$. 其中 $M_1 = \varphi_p^{-1}(N^* + M(b-a))$. 于是 $N(C_B^1)$是有界的. 再证 C_B^1 在$[a,b]$上等度连续:对$\forall\ y \in C_B^1$ 和 $s,t \in [a,b]$有:

$$|Ny(t) - Ny(s)| \leqslant \left| \int_s^t I(v)dv \right|,$$

$$|(Ny)'(t) - (Ny)'(s)| \leqslant M_1 \sup |(\varphi_p^{-1})'(x)| |t-s|,$$

这里 $I(s) = |\varphi_p^{-1}(N^* + M(b-s))|$, $\sup|(\varphi_p^{-1})'(x)|$表示在$[-N^* - M_1(b-a), N^* + M_1(b-a)]$上的上确界. 因此由 Arzela-Ascoli 定理得 N 于 $C_B^1[a,b]$上是全连续的. 故 N 是 $C_B^1 \to C_B^1$ 的全连续算子. 于是据 Schauder 不动点定理知算子 N 在 C_B^1 内有不动点.

(ii) $p>2$ 情形. 当 $p>2$ 时,由于 φ_p^{-1} 在 $x=0$ 处不可导,故考虑扰动边值问题:

$$\begin{cases} (g_\varepsilon(y'))' = f(t,y,y'), & (2.6) \\ y(a) = A, \quad y(b) = B, & (2.7) \end{cases}$$

其中 $g_\varepsilon = \varepsilon y + \varphi_p(y)$. 与情形(i)完全类似,定义

$$N: C_B^1 \to C_B^1. Ny = A + \int_a^t g_\varepsilon^{-1}(c - \int_s^b f(z,y,y')dz)ds,$$

c是方程 $B - A = \int_a^b g_\varepsilon^{-1}(c - \int_s^b (z,y,y')dz)ds$的(唯一)解. 可证 N 对$\forall\ \varepsilon>0$ 存在不动点,即对$\forall\ \varepsilon>0$ 边值问题(2.6),(2.7)存在解 y_ε 且存在 $M^*>0$ 使得: $|y_\varepsilon|_1 \simeq \max(|y_\varepsilon|_0, |y'_\varepsilon|_0) \leqslant M^*$(与 ε 无关),以及 $|(g_\varepsilon(y'_\varepsilon))'| \leqslant M^*$. 由 Arzela-Ascoli 定理可得,存在收敛的子列$\{g_{\varepsilon'}(y'_{\varepsilon'})\}$(不妨仍记$g_\varepsilon(y'_\varepsilon)$)有:存在 $v \in C[a,b]$, $g_\varepsilon(y'_\varepsilon) \to v\ (\varepsilon \to 0)$. 即 $g_\varepsilon(y'_\varepsilon) = \varepsilon y'_\varepsilon + \varphi_p(y'_\varepsilon) \to v\ (\varepsilon \to 0)$. 由 $|y'_\varepsilon| \leqslant M^*$ 有 $\varphi_p(y'_\varepsilon) \to v\ (\varepsilon \to 0)$,即 $y'_\varepsilon \to \varphi_p^{-1}(v)\ (\varepsilon \to 0)$. 故有

$$y_\varepsilon = A + \int_a^t y'_\varepsilon(s)ds \to A + \int_a^t \varphi_p^{-1}(v)ds = y\ (\varepsilon \to 0).$$

又 y_ε 满足: $\varepsilon y'_\varepsilon + \varphi_p(y'_\varepsilon) = c - \int_s^b f(z,y_\varepsilon,y'_\varepsilon)dz$. 令 $\varepsilon \to 0$ 可得 y 满足方程(1.1). 故定理得证.

定理 2.2 设 $\alpha(t),\beta(t) \in C^1[a,b]$是方程(1.1)的下解和上解,且在$[a,b]$上: $\beta(t) \geqslant \alpha(t)$. f 满足条件(H_1)和(H_2),则对任何 $\alpha(a) \leqslant A \leqslant \beta(a)$, $\alpha(b) \leqslant B \leqslant \beta(b)$边值问题(1.1),(1.2)至少存在一个解且 $\alpha(t) \leqslant y \leqslant \beta(t)$.

证明 取 $R>0$,使 $|\alpha(t)| \leqslant R$, $|\beta(t)| \leqslant R$, $t \in [a,b] = I$. 由条件可知:存在 $N > \max\{\frac{2R}{b-a}, \max_{t\in I}\{|\beta'(t)|; |\alpha'(t)|\}\}$. 使得:

$$\int_{(\frac{2R}{b-a})^{p-1}}^{N^{p-1}} \varphi_p^{-1}(u)/\psi(\varphi_p^{-1}(u))du > 2R. \quad (2.8)$$

定义函数：

$$f_1(t,y,z)=\begin{cases} f(t,y,z), & |z|\leqslant N, \\ f(t,y,N.\mathrm{sgn}z), & |z|>N, \end{cases}$$

$$F(t,y,z)=\begin{cases} f_1(t,\beta(t),z)+\dfrac{y-\beta(t)}{1+y-\beta(t)}, & y>\beta(t), \\ f_1(t,y,z), & \alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t), \\ f_1(t,\alpha,z)-\dfrac{\alpha(t)-y}{1+\alpha(t)-y}, & y<\alpha(t), \end{cases}$$

则 $F(t,y,z)$ 于 Ω 上连续，有界. 于是由引理 2.1 可知边值问题：

$$\begin{cases} (\varphi_p(y'))'=F(t,y,y'), & (2.9) \\ y(a)=A \quad y(b)=B & (2.10) \end{cases}$$

有解 $y(t)$. 若能证 $\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$，$|y'|\leqslant N$. 则 $y(t)$ 即为(1.1)的解. 从而定理得证.

i) 先证 $\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$. 显然有：$\beta(a)\geqslant y(a)\geqslant\alpha(a)$，$\beta(b)\geqslant y(b)\geqslant\alpha(b)$，下面只需证 $t\in(a,b)$ 时有：$\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$. 若不然，存在 $t_0\in(a,b)$ 使得：$\min(y(t)-\alpha(t))=y(t_0)-\alpha(t_0)<0$，$y'(t_0)=\alpha'(t_0)$. 此时 $F(t_0,y(t_0),y'(t_0))-f_1(t_0,\alpha(t_0),\alpha'(t_0))<0$. 由连续性和 f_1 的定义可得：可取 $\varepsilon>0$ 充分小使得：$\forall\ t\in[t_0,t_0+\varepsilon]$ 有 $F(t,y,y'(t))-f(t,\alpha,\alpha'(t))<0$. 又可取 $t_1\in(t_0,t_0+\varepsilon)$ 使得：

$$y'(t_1)\geqslant\alpha'(t_1). \tag{2.11}$$

而由(2.9)得：

$$\varphi_p(y'(t_1))=\varphi_p(y'(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}F(s,y,y')ds<\varphi_p(\alpha'(t_0))+\int_{t_0}^{t_1}f(s,\alpha,\alpha')ds\leqslant\varphi_p(\alpha'(t_1)).$$

从而推之：$y'(t_1)<\alpha'(t_1)$ 与(2.11)矛盾. 故有 $y(t)\geqslant\alpha(t)$. 同理可证：$y(t)\leqslant\beta(t)$.

ii) 再证 $|y'|\leqslant N$. 若不然 $\exists\ t_2\in[a,b]$ 使得 $|y'(t_2)|>N$. 不妨设 $y'(t_2)>N$. 由微分中值定理知，存在 $\xi\in[a,b]$ 使 $y(b)-y(a)=y'(\xi)(b-a)$. 从而有：$|y'(\xi)|\leqslant 2R/(b-a)<N$. 则存在 $[c,d]\subset[a,b]$ 使 $y'(c)=\dfrac{2R}{(b-a)}$，$y'(d)=N$，且当 $t\in[c,d]$ 时，$2R/(b-a)\leqslant y'<N$. 由方程(2.9)可得 $(\varphi_p(y'))'\leqslant\psi(y')$. 从而有

$$\int_c^d\frac{\varphi_p^{-1}(\varphi_p(y'))(\varphi_p(y'))'}{\psi(\varphi_p^{-1}(\varphi_p(y')))}ds=\int_c^d\frac{y'(\varphi_p(y'))'}{\psi(y')}ds\leqslant\int_c^d y'ds\leqslant 2R,$$

即有 $\displaystyle\int_{(\frac{2R}{(b-a)})^{p-1}}^{N^{p-1}}\frac{\varphi_p^{-1}(u)}{\psi(\varphi_p^{-1}(u))}du\leqslant 2R$ 与(2.8)矛盾. 故有 $|y'|\leqslant N$.

§3 非线性边界条件

本节讨论方程(1.1)且逐一满足边界条件(1.3)－(1.5)解的存在性结果. 首先引入几个集合：

$F=\{(y,z,u,v)\,|\,\alpha(a)\leqslant y\leqslant\beta(a),\ \alpha(b)\leqslant z\leqslant\beta(b),\ u,v\in(-\infty,+\infty)\}$；

$G=\{g$ 为 F 上的连续函数全体 $|\,g$ 对 u 非减，对 v 非增且满足：$g(\alpha(a),\alpha(b),\alpha'(a),\alpha'(b))\geqslant 0\geqslant g(\beta(a),\beta(b),\beta'(a),\beta'(b))\}$；

$H=\{h(y)\mid h:[\alpha(a),\beta(a)]\to[\alpha(b),\beta(b)]$同胚且$h(\alpha(a))=\alpha(b),h(\beta(a))=\beta(b)\}$；$P=\{p(s,t)\mid p:[\alpha(a),\beta(a)]\times R\to R$ 连续，且对 t 非增，满足 $p(\alpha(a),\alpha'(a))\leqslant 0\leqslant p(\beta(a),\beta'(a))\}$；

$\Gamma=\{(s,t,u,v)\mid\alpha(a)\leqslant s\leqslant\beta(a),\ \alpha(b)\leqslant u\leqslant\beta(b),\ t,v\in R\}$；

$Q=\{q(s,t,u,v)\mid q$ 在 Γ 上连续，对 v 非减且对$(s,t)\in Z(p)$有：$q(s,t,\alpha(b),\alpha'(b))\leqslant 0\leqslant q(s,t,\beta(b),\beta'(b))\}$；

$Z(p)=\{(s,t)\mid p(s,t)=0,\alpha(a)\leqslant s\leqslant\beta(a),\ t\in R\}$；

$Z(r)=\{(u,v)\mid r(u,v)=0,\ \alpha(b)\leqslant u\leqslant\beta(b),\ v\in R\}$；

$R=\{r(u,v)\mid r:[\alpha(b),\beta(b)]\times R\to R$ 连续，且对 v 非减，满足：$r(\alpha(b),\alpha'(b))\leqslant 0\leqslant r(\beta(b),\beta'(b))\}$；

$W=\{w(s,t,u,v)\mid w$ 定义在 Γ 上对 t 非增连续函数，且对$(u,v)\in Z(r)$有：

$$w(\alpha(a),\alpha'(a),u,v)\leqslant 0\leqslant w(\alpha(b),\alpha'(b),u,v)\}.$$

定理 3.1 设 $\alpha,\beta\in C^1[a,b]$是方程(1.1)的下解和上解，且 $\alpha(a)<\beta(a),\alpha(b)<\beta(b)$，$\alpha(x)\leqslant\beta(x)$. f 满足条件(H_1)和(H_2). 且 $g\in G,h\in H$. 则边值问题(1.1)，(1.3)至少存在一个解 y，且 $\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$.

证明 对$\forall\ c\in[\alpha(a),\beta(a)]$，由定理 2.2 得边值问题：$(\varphi_p(y'))'=f(t,y,y'),y(a)=c$，$y(b)=h(c)$至少存在一个解 y_c 且满足 $\alpha(t)\leqslant y_c\leqslant\beta(t)$.

(一) 若 $c=\alpha(a)$，则有 $y_c'(a)\geqslant\alpha'(a),y_c'(b)\leqslant\alpha'(b)$. 故有

$$g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))\geqslant g(\alpha(a),\alpha(b),\alpha'(a),\alpha'(b))\geqslant 0.$$

对 $c=\beta(a)$则有：$y_c'(a)\leqslant\beta'(a),y_c'(b)\geqslant\beta'(b)$. 因此 $g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))\leqslant g(\beta(a),\beta(b),\beta'(a),\beta'(b))\leqslant 0$. 于是若 $\alpha(a)=\beta(a)$，故有：$g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))=0$. 即 y_c 为边值问题(1.1)，(1.3)的解且 $\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$.

(二) 若 $\alpha(a)<\beta(a)$，假设问题(1.1)和(1.3)解不存在，对$\forall\ c\in[\alpha(a),\beta(a)]$边值问题：$(\varphi_p(y'))'=f(t,y,y'),y(a)=c,y(b)=h(c)$的解 y_c 都有：$g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))\neq 0$. 由(一)讨论知当 $c=\alpha(a)$时，$g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))>0$，当 $c=\beta(a)$时，$g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))<0$. 若记 $M=\{c\in[\alpha(a);\beta(a)]:g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))>0\}$，$N=\{c\in[\alpha(a);\beta(a)]:g(y_c(a),y_c(b),y_c'(a),y_c'(b))<0\}$. 则 $M\neq\varnothing,N\neq\varnothing$且 $M\cap N=\varnothing$. $M\cup N=[\alpha(a),\beta(a)]$. 可以证明 M 和 N 皆为闭集，于是 $M\cap N=\varnothing$时，$M\cup N$ 为不连通集，这与 $M\cup N=[\alpha(a),\beta(a)]$矛盾，故 $\alpha(a)<\beta(a)$时，边值问题(1.1)，(1.3)存在解.

定理 3.2 设 $\alpha(t),\beta(t)\in C^1[a,b]$是方程(1.1)的下解和上解，$\alpha(a)<\beta(a),\alpha(b)<\beta(b)$，$\alpha(t)\leqslant\beta(t),f$ 满足(H_1)和(H_2)，且 $p\in P,q\in Q$. 则边值问题(1.1)，(1.4)至少存在一个解 y 且 $\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$.

定理 3.3 设 $\alpha(t),\beta(t)\in C^1[a,b]$是(1.1)的下解和上解，且 $\alpha(t)\leqslant\beta(t),f$ 满足条件(H_1)和(H_2)，且设 $r\in R,w\in W$，则边值问题(1.1)，(1.5)至少存在一个解 y 且满足 $\alpha(t)\leqslant y\leqslant\beta(t)$.

推论 3.4 设 $\alpha(t),\beta(t)\in C^1[a,b]$是(1.1)的下解和上解，且 $\alpha(t)\leqslant\beta(t),f$ 满足(H_1)和(H_2)，且定义 $m=(\beta(b)-\alpha(b))/(\beta(a)-\alpha(a))$，进一步设存在 $c>0$ 使 $\beta'(b)-\alpha'(b)\geqslant c(\beta'(a)-\alpha'(a))$和令 d 满足：$\beta'(b)-c\beta'(a)\geqslant d\geqslant\alpha'(b)-c\alpha'(a)$. 则方程(1.1)存在一个解 y 且$\alpha(t)\leqslant$

$y \leqslant \beta(t)$和满足：$y(b)=my(a)+(\alpha(b)-m\alpha(a)), y'(b)=cy'(a)+d$.

推论 3.5 设 $\alpha(t), \beta(t)$是(1.1)的下解和上解. 存在 $L>0$ 和$\forall (x,y)\in E, \forall y_1, y_2$ 有：

$$|f(t,y,y_1')-f(t,y,y_2')| \leqslant L|y_1'-y_2'|.$$

令 A, B, a_1, a_2, b_1, b_2 是实数以及 $a_i \geqslant 0, b_i \geqslant 0 (i=1,2)$. $a_1+a_2>0, b_1+b_2>0, a_1+b_1>0$ 使得：

$$a_1\alpha(a)-a_2\alpha'(a)-A \leqslant 0 \leqslant a_1\beta(a)-a_2\beta'(a)-A,$$

$$b_1\alpha(b)+b_2\alpha'(b)-B \leqslant 0 \leqslant b_1\beta(b)+b_2\beta'(b)-B.$$

则方程(1.1)存在一个解，且满足

$$a_1y(a)-a_2y'(a)-A=0=b_1y(b)+b_2y'(b)-B, \alpha(t) \leqslant y \leqslant \beta(t).$$

参 考 文 献

[1] S. Fucik, J. Necas, J. Soucek and V. Soucek, *Spectral analysis of nonlinear operators*, Lectures Notes in Math, Springer Berlin, 346(1973).

[2] M.A.Herrero and J.L.Vazquez, Comm P.D.E., 7(1982), 1381—1402.

[3] J.R.Esteban and J.L.Vazquez, Nonlinear Anal, 10,11(1986), 1303—1325.

[4] H.G.Kapper, M.Knapp and M.K.Kwong, Diff. and Int. Eqn, 4(1991), 543—554.

[5] Z.M.Guo, Applicable Anal, 47(1992), 173—189.

[6] M.N.Pino, M.Elgueta and R.Manasevich, J.Diff Eq, 80(1989), 1—13.

[7] R.E.Gaines and J.Manhin, J. Diff Eq, 26(1977), 200—222.

[8] L.H.Erbe, Nonlinear Anal, 6(1982), 1155—1162.

[9] J.Mawhin and K.Schmitt, Pro. R. Soc Edinb, Series A. 97(1984), 199—207.

Two-Point Boundary Value Problem with Nonlinear Boundary Condition for a Class of Second Order Nonlinear ODE

Yang Zuodong

(Dept. of Math., Henan Normal Univ, Xinxiang 453002)

Abstract

In this paper, we study a class of second order nonlinear ordinary differential equations. The existence of solutions to two-point boundary value problems with linear boundary conditions and nonlinear boundary conditions are proved.

Keywords nonlinear ordinary differential equations, two-point boundary value problems.