第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

一阶完全非线性常微分方程的周期粘性解*

李德生 臧子龙
(兰州大学数学系，730000) (兰州师专数学系，730070)

摘 要 本文在适当的自然结构条件下证明了完全非线性常微分方程 $F(t,u(t),u'(t))=0$ 的周期粘性解的存在唯一性.

关键词 非线性微分方程，周期粘性解，存在唯一性，正则性.
分类号 AMS(1991) 34A34/CCL O175.14

§1 引 言

对完全非线性常、偏微分方程，由于无法采用积分的方法来定义广义解，粘性解便成为一种适宜的弱解. 关于初、边值问题粘性解的存在唯一性，大致已有完满的结论(见[1],[2],[3],[4]等).

本文考虑一阶完全非线性常微分方程

$$F(t,u(t),u'(t))=0,\quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

的周期解问题，其中 $F(t,r,p)$ 关于 t 是以 T 为周期的函数，即 F 满足

$$F(t+T,r,p)=F(t,r,p). \tag{1.2}$$

在适当的自然结构条件下证明了(1.1)周期粘性解的存在唯一性.

§2 基本结果

先回顾一下粘性解的定义.

设 $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. 记

$$\partial^+u(t)(\partial^-u(t))=\{\varphi'(t):\varphi\in C^1(\mathbb{R})\text{ 且 }u-\varphi\text{ 在 }t\text{ 点有局部最大(小)值}\}.$$

$\partial^+u(t)$，$\partial^-u(t)$ 分别称为 u 在点 t 的一阶上、下导集.

定义 2.1 设 $u\in \mathrm{USC}(\mathbb{R})$ $(\mathrm{LSC}(\mathbb{R}))$ 称 u 是方程(1.1)的一个粘性下(上)解，如果 $\forall\, t\in\mathbb{R}$，$p\in\partial^+u(t)(\partial^-u(t))$，有

$$F(t,u(t),p)\leqslant 0\ (\geqslant 0).$$

其中 $\mathrm{USC}(\mathbb{R})$、$(\mathrm{LSC}(\mathbb{R})$ 分别代表 $\mathbb{R}$ 上上、下半连续函数的全体.

如果 $u\in C(\mathbb{R})$ 既是(1.1)的粘性上解，又是其粘性下解，则称 u 是(1.1)的一个粘性解.

* 1993年12月6日收到. 国家自然科学基金资助.

需要如下结构条件：

(F_1)　$F \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$；

(F_2)　$\exists\ \delta>0$ 使得 $\delta(r-s)\leqslant F(t,r,p)-F(t,s,p)\ (r>s)$；

(F_3)　$\exists$ 模函数 ω 和非负数 $\eta\in C([0,\infty))$ 使得 $|F(t_1,r,p)-F(t_2,r,p)|\leqslant\eta(|r|)\omega(|t_1-t_2|(1+|p|))$.

本文的主要结果是：

定理 2.1　设 F 满足(F_1),(F_2)和(F_3)，$u\in \mathrm{USC}(\mathbb{R})$ 和 $v\in\mathrm{LSC}$ 分别是(1.1)的以 T 和 T'为周期的粘性下解和上解，且$\exists\ m,n\in N$ 使得 $mT=nT'$，则 $u\leqslant v$.

定理 2.2　设 F 满足(1.2)和(F_1),(F_2),(F_3). 则方程(1.1)存在以 T 为周期的粘性解 u. 又如果 v 是(1.1)的以 T'为周期的粘性解且存在 $m,n\in N$ 使得 $mT=nT'$，则 $u=v$.

定理 2.3　设 F 满足(F_1),(F_2)和(F_3)(不必满足(1.2))，又 $F(t,r,p)$关于 p 单调递增. 设 u,v 分别是(1.1)的以 T 和 T'为周期的粘性解，则 $u=v$.

§3　定理 2.1,2.2 的证明

定理 2.1 的证明　由 $mT=nT'$，知 $u-v$ 必在 $\mathbb{R}$ 上某点处取互最大值. 证明于是由[2]，[4]等给出.

定理 2.2 的证明　由(F_2)知，$\exists\ C>0$ 使得 C 和 $-C$ 分别是(1.1)的粘性上、下解. 记

$$W=\{w\in \mathrm{USC}: w \text{ 是(1.1) 的以 } T \text{ 为周期的粘性下解且 } -C\leqslant w\leqslant C\},$$

令

$$u(t)=\sup\{w(t): w\in W\},\quad u^*(t)=\overline{\lim_{s\to t}}\,u(s),\quad u_*(t)=\underline{\lim_{s\to t}}\,u(s).$$

则 $-C\leqslant u_*(t)\leqslant u(t)\leqslant u^*(t)\leqslant C$. 由[1](pro. 2.4)，$u^*$是(1.1)的以 T 为周期的粘性下解. 于是 $u^*\in W$，从而又有 $u=u^*$.

下面证明 u_*是(1.1)的粘性上解. 反设不然，则$\exists\ \hat{t}\ \mathbb{R}$ 和 $p\in\partial\bar{u}_*(\hat{t})$使得

$$F(\hat{t},u_*(\hat{t}),p)<0, \tag{3.1}$$

我们断言：$u_*(\hat{t})<C$. 否则由 $u_*(\hat{t})=C$ 和 $u_*(t)\leqslant C$ 知 $\partial^- u_*(\hat{t})\subset\partial^- C=\{0\}$. 从而 $p=0$. 于是又有：

$$F(\hat{t},u_*(\hat{t}),p)=F(\hat{t},c,0)\geqslant 0.$$

设 $\varphi\in C^1(\mathbb{R})$ 使得 $u_*(t)-\varphi(t)$在 $\hat{t}$ 有局部极小值且 $\varphi'(\hat{t})=p$. 不妨设 $u_*(\hat{t})=\varphi(\hat{t})$，$u_*(t)-\varphi(t)\geqslant(t-\hat{t})^2$(对某个 $\varepsilon_0>0$ 和 $t\in B(\hat{t},\varepsilon_0)$)，否则可用 $\tilde{\varphi}(t)=u_*(\hat{t})+\varphi(t)-\varphi(\hat{t})-(t-\hat{t})^2$ 代替 $\varphi(t)$. 设 $\varepsilon_0<\dfrac{T}{2}$($T$ 为 F 关于 t 的周期). 由连续性，$\exists\ \varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0/2)$使得

$$F(t,\varphi(t)+\varepsilon_1^2,\varphi'(t))\leqslant 0 \tag{3.2}$$

和

$$\varphi(t)+\varepsilon_1^2\leqslant C \tag{3.3}$$

对 $t\in B(\hat{t},2\varepsilon_1)$. (3.2)式表明 $\varphi(t)+\varepsilon_1^2$ 是(1.1)在 $B(\hat{t},2\varepsilon_1)$上的一个古典下解. 显然，$u(t)\geqslant u_*(t)\geqslant\varphi(t)+\varepsilon_1^2$ 对 $t\in B(\hat{t},2\varepsilon_1)\backslash B(\hat{t},\varepsilon_1)$. 定义

$$v(t)=\begin{cases}\max\{\varphi(s)+\varepsilon_1^2,u(t)\}, & \text{若 } t=KT+s \text{ 且 } s\in B(\hat{t},\varepsilon_1),\\ u(t), & \text{其它}\end{cases}$$

由[1](Pro. 2. 4),v 是(1. 1)的以 T 为周期的粘性下解. 显然,$v\in W$.

另一方面,由 u_* 的定义,∃ $t_n\to\hat{t}$ 使得 $u(t_n)\to u_*(\hat{t})$. 又 $u_*(\hat{t})=\varphi(\hat{t})$,故当 n 充分大时,有 $\varphi(t_n)+\varepsilon_1^2>u(t_n)$,从而 $\sup\limits_R(v-u)>0$. 这与 u 是 W 中的最大元矛盾.

由定理 2. 1,有 $u=u^*\leqslant u_*\leqslant u$,从而 $u\in C(\mathbb{R})$ 是(1. 1)的以 T 为周期的粘性解. 结论的后一部分是定理 2. 1 的直接推论.

§ 4 定理 2. 3 的证明

引理 4. 1 ∀ $r>0$,∃ 无穷多组整数(m,n)使得

$$|r-\frac{n}{m}|\leqslant\frac{1}{m^2}. \tag{4.1}$$

证明 见[5](p533).

定理 2. 3 的证明 证明:$u\leqslant v$.

反设不然,则 $\sup\limits_R(u-v)>0$. 如果 $u-v$ 在 $\mathbb{R}$ 内某点 t_0 达到上确界,则证明同定理 2. 1,故不妨设 $u-v$ 在 $\mathbb{R}$ 内达不到上确界. 由引理 4. 1,知∀ $\varepsilon>0$,∃ $m,n\in N$ 使得:

$$|mT-nT'|<\varepsilon. \tag{4.2}$$

从而可知∃ $\{t_n\}\subset(0,\infty)$使得

$$\sup_R(u-v)>0=\lim_{n\to\infty}[u(t_n)-v(t_n)]. \tag{4.3}$$

∀ $t_0\in\mathbb{R}$,在$[t_0,\infty)$上考虑 u,v. 令

$$\tilde{v}(t)=v(t)+\varepsilon t\quad t\in[t_0,\infty). \tag{4.4}$$

由 $u(t_0)-v(t_0)<\sup\limits_R(u-v)$ 和(4. 3)知,当 ε 充分小时

$$u(t_0)-\tilde{v}(t_0)<\sup_{[t_0,\infty)}(u-\tilde{v}). \tag{4.5}$$

又 $u(t)-\tilde{v}(t)\to-\infty(t\to\infty)$. 由(4. 5),∃ $\hat{t}\in(t_0,\infty)$使得:

$$u(\hat{t})-\tilde{v}(\hat{t})=\sup_{[t_0,\infty)}(u-\tilde{v}). \tag{4.6}$$

由(F_2)和 $F(t,r,p)$关于 p 的单调递增性,知 $\tilde{v}$ 是(1. 1)在(t_0,∞)上的粘性上解. 同定理 2. 1,知

$$u(t)\leqslant\tilde{v}(t)=v(t)+\varepsilon t\ [t_0,\infty). \tag{4.7}$$

令 $\varepsilon\to0$,再由 t_0 的任意性即得结论.

同理可证 $u\geqslant v$.

参 考 文 献

[1] H. Ishii, *Perron's method for Hamilton-Jacobi equations*, Duke Math. J., 55(1987).

[2] H. Ishii, *Existence and uniqueness of viscosity solutions of Hamilton—Jacobi equations*, Funkcial. Ekvac., 29(1986), 167—188.

[3] H. Ishii, *On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's*, Comm. Pure Appl. Math., 42(1989).

[4] H. Ishii and P. L. Lions, *Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations*, J. Diff. Equa., 83(1990), 26—78.

[5] 华罗庚，数论导引，科学出版社，1957，533.

[6] 金福临、李训经等，常微分方程，上海科学技术出版社，1984.

The Existence, Uniqueness and Regularity of Periodic Viscousity Solution for Fully Nonlinear Differential Equations

Li Desheng
(Dept. of Math., Lanzhou Univ., 730000)

Zang Zilong
(Dept. of Math., Lanzhou Teachers College, 730070)

Abstract

In this paper, the existence, uniqueness and almost everywhere derivativity of periodic viscosity solutions are established for fully nonlinear differential equations: $F(t,u,u')=0$ under some natural structure conditions.

Keywords nonlinear ordinary differential equation, periodic viscosity solutions, uniqueness and existence.