第15卷 增刊
1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 Supp
Nov. 1995

一类高维非自治系统的周期解*

吴晓非 李 林
(郑州纺织工学院,450007) (北京石油化工学院,102600)

摘 要 本文讨论了一类高维非自治系统的周期解的存在性问题,推广了文[1]中的一个结果.

关键词 非自治系统,周期解,最终有界的.
分类号 AMS(1991) 34C25/CCL O175.12

§1 引言和引理

目前关于高维系统空间周期解存在性的研究方法还不够多,而其中许多内容还有待于进一步完善[2,3]. 在这篇短文中,我们提供了一种判定高维非自治系统存在周期解的方法.

在[1]中,讨论了非线性向量微分方程

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.1}$$

w-周期解的存在性,其中 $f(t,x)$关于$(t,x)\in R\times R^n$ 连续,对 t 有周期 w,且能保证(1.1)解的唯一性. 从文[1]我们引入

引理 对于方程

$$\dot{x} = A(t)x + \mu g(t,x), \tag{1.2}$$

其中 $A(t+w)\equiv A(t)$为 R 上的 $n\times n$ 连续矩阵函数,$g(t+w,x)\equiv g(t,x)$为 $R\times R^n$ 上的 n 维连续向量函数,$\mu\in[0,1]$. 如果下列条件成立,则(1.2)至少存在一个 w-周期解.

(i) 线性齐次方程组 $\dot{x}=A(t)x$ 没有非平凡 w-周期解;

(ii) (1.2)的解最终一致(关于 μ)有界.

由此引理可知,解的最终有界性是周期解存在的重要条件,以下讨论具有某种特性的(1.2)的解的最终有界性.

考虑

$$\dot{x} = \begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_1(t)x_1 + \mu g_1(t,x_1,x_2)\\ A_2(t)x_2 + \mu g_2(t,x_1,x_2)\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

其中 x_i,g_i 是 n_i 维向量,$A_i(t)$是 $n_i\times n_i$ 矩阵函数($i=1,2,n_i\geqslant 1$).

以下我们用 $\|\cdot\|$ 表示范数,不失一般性,对向量而言其范数为其所有分量绝对值的和;对矩阵而言其范数为其所有元素绝对值的和.

* 1993年6月14日收到.

§2 主要结果

定理1 设

(i) (1.3)中 $A_i(t)$ 为常数矩阵，且是稳定的，$g_i(t,x_1,x_2)$ 连续，且关于 t 以 w 为周期($i=1,2$)；

(ii) $\|g_1(t,x_1,x_2)\| \leqslant |G_1(t)|\cdot\|x_1\|+|\overline{G}_1(t)|$，且 $\int^{-\infty}|G_1(t)|dt<+\infty$，$|\overline{G}_1(t)|\leqslant M_1$ (正常数)；

(iii) 对任意的 $k>0$，当 $\|x_1\|\leqslant k$ 时有

$$\|g_2(t,x_1,x_2)\| \leqslant |G_2(t)|\cdot\|x_2\| + |\overline{G}_2(t)|,$$

且 $\int^{+\infty}|G_2(t)|dt<+\infty$，$|\overline{G}_2(t)|<M_2$ (正常数).

则(1.3)至少存在一个 w-周期解.

证明 考虑(1.3)的满足初值条件 $x_1(t_0)=x_{10}$，$x_2(t_0)=x_{20}$ 的解 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$，则

$$x_1(t)=X_1(t,t_0)x_{10}+\mu\int_{t_0}^{t}X_1(t,\tau)g_1(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau))d\tau,$$

其中 $X_1(t,t_0)$ 为 $\dot{x}_1=A_1x_1$ 的标准基本解矩阵. 由于 A_1 为稳定的，故存在 $a_1,k_1>0$，使得

$$\|X_1(t,t_0)\| \leqslant a_1\exp[-k_1(t-t_0)] \quad (t\geqslant t_0),$$

那么

$$\|x_1(t)\|\leqslant a_1\exp[-k_1(t-t_0)]\cdot\|x_{10}\| + \int_{t_0}^{t}a_1\exp[-k_1(t-\tau)]$$
$$\cdot[|G_1(\tau)|\cdot\|x_1(\tau)\| + |\overline{G}_1(\tau)|]d\tau \quad (t\geqslant t_0).$$

令上式右端为 $z(t)$，则有

$$\frac{dz(t)}{dt}=a_1[|G_1(t)|\cdot\|x_1(t)\| + |\overline{G}_1(t)|]-k_1z(t)$$
$$\leqslant [a_1|G_1(t)-k_1]z(t)+a_1|\overline{G}_1(t)|.$$

从而

$$z(t)\leqslant \exp[\int_{t_0}^{t}(a_1|G_1(\tau)|-k_1)d\tau]$$
$$\cdot\{\int_{t_0}^{t}\exp[-\int_{t_0}^{\tau}(a_1|G_1(\eta)|-k_1)d\eta]\cdot a_1|\overline{G}_1(\tau)|d\tau+a_1\|x_0\|\} \quad (t\geqslant t_0),$$

故

$$\|x_1(t)\|\leqslant z(t)\leqslant a_1\|x_{10}\|\exp[\int_{t_0}^{t}(a_1|G_1(\tau)|-k_1)d\tau]$$
$$+\int_{t_0}^{t}\exp[\int_{\tau}^{t}(a_1|G_1(\eta)|-k_1)d\eta]a_1|\overline{G}_1(\tau)|d\tau. \tag{2.1}$$

由于 $\int^{+\infty}|G_1(t)|dt<+\infty$，则有

$$\int_{\tau}^{t}a_1|G_1(\eta)|d\eta<N \text{(当 } t \text{ 充分大时)}. \tag{2.2}$$

所以(2.1)右端中的第二项应小于等于 $\int_{t_0}^{t}e^{N}e^{-k_1(t-\tau)}a_1M_1d\tau=a_1M_1e^{N}\int_{t_0}^{t}e^{-k_1(t-\tau)}d\tau=\frac{a_1M_1e^{N}}{k_1}[1$

$-e^{-k_1(t-t_0)}]$. 由(2.2)，可设 $\exp[\int_{t_0}^{t} a_1|G_1(\tau)|d\tau]\leqslant L$($t$ 充分大时). 所以

$$\|x_1(t)\|\leqslant\frac{a_1M_1e^N}{k_1}+[a_1\|x_{10}\|L-\frac{a_1M_1e^N}{k_1}]e^{-k_1(t-t_0)}\leqslant\frac{2a_1M_1e^N}{k_1}=\rho_1,\ t\geqslant t_0+T(\|x_{10}\|).$$

令 $t_0'=t_0+T(\|x_{10}\|)$，$x_2(t_0')=x_{20}'$. 则

$$x_2(t)=X_2(t,t_0')x_{20}'+\mu\int_{t_0'}^{t}X_2(t,\tau)g_2(\tau,x_1(\tau),x_2(\tau))d\tau,$$

其中 $X_2(t,t_0')$ 为 $\dot{x}=A_2x_2$ 的标准基本解矩阵. 因为 $\|x_1\|\leqslant\rho_1$ 及条件(iii)，仿以上过程可得 $\|x_2(t)\|\leqslant\rho_2$，$t\geqslant t_0'+T'(\|x_{10}\|,\|x_{20}\|)$. 这就证明了(1.3)的解是最终有界的.

又因为 A_1,A_2 是稳定的，故易知(1.3)所对应的齐次系统无非平凡 w-周期解. 综上两点，由引理知(1.3)至少存在一个 w-周期解.

易知定理 1 是[1]中 P101 的例子的推广. 如果定理 1 中的 $G_1(t)\equiv G_2(t)\equiv 0$，$|\overline{G}_1(t)|$，$|\overline{G}_2(t)|$ 为常数，$\mu=1$，则可得[1]中原结论. 另外，仿定理 1 的证明过程易证

推论 1　考虑方程

$$\dot{x}=Ax+g(t,x),\tag{2.3}$$

如果下列条件成立

(i)　A 为 $n\times n$ 稳定的常数矩阵. $g(t+w,x)\equiv g(t,x)$ 关于 $(t,x)\in R\times R^n$ 连续；

(ii)　$\|g(t,x)\|\leqslant|G(t)|\cdot\|x\|+|\overline{G}(t)|$，且 $\int^{+\infty}|G(t)|dt<+\infty$，$|\overline{G}(t)|\leqslant M$(正常数)，

则(2.3)至少存在一个 w-周期解.

定理 2　在(1.3)中，如果下列条件成立.

(i)　$A_i(t)$ 为 n_i 阶连续 w-周期函数方阵，$g_i(t,x_1,x_2)$ 连续，且关于 t 以 w 为周期($i=1,2$)；

(ii)　定理 1 之条件(ii)，(iii)成立；

(iii)　$\dot{x}_i=A_i(t)x_i$ 的零解渐近稳定($i=1,2$)，

则(1.3)至少存在一个 w-周期解.

证明　由于存在李雅普诺夫变换[4]

$$x_i=F_i(t)y_i,\tag{2.4}$$

使得 $\dot{x}_i=A_i(t)x_i$，变成 $\dot{y}_i=B_iy_i$，($i=1,2$)，其中 B_i 为 $n_i\times n_i$ 常数矩阵，$F_i(t)$ 为连续、非奇异(对所有 t)，以 w 为周期的 $n_i\times n_i$ 矩阵函数($i=1,2$).

由(iii)可知，B_i 为稳定矩阵($i=1,2$). 对方程(1.3)进行变换(2.4)得

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}B_1y_1+F_1^{-1}(t)\mu g_1(t,F_1(t)y_1,F_2(t)y_2)\\ B_2y_2+F_2^{-1}(t)\mu g_2(t,F_1(t)y_1,F_2(t)y_2)\end{bmatrix}.\tag{2.5}$$

由(ii)有

$$\|F_1^{-1}(t)g_1(t,F_1(t)y_1,F_2(t)y_2)\|\leqslant\|F_1^{-1}(t)\|[|G_1(t)|\cdot\|F_1(t)\|\cdot\|y_1\|+|\overline{G}_1(t)|]$$

$$\leqslant\|F_1^{-1}\|\cdot[\|F_1\|\cdot|G_1(t)|\cdot\|y_1\|+|\overline{G}_1(t)|]=l_1|G_1(t)|\cdot\|y_1\|+l_2|\overline{G}_1(t)|,$$

其中 $\|F_1\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant w}\|F_1(t)\|$，$\|F_1^{-1}\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant w}\|F_1^{-1}(t)\|$. $l_1=\|F_1^{-1}\|\cdot\|F_1\|$，$l_2=$

$\| F_1^{-1} \|$.

又对于任意 $k>0$,当 $\| y_1 \| \leqslant k$ 时,有 $\| F_1(t)y_1 \| \leqslant \| F_1 \| k$. 则与上面同样可得

$$\| F_2^{-1}(t)g_2(t,F_1(t)y_1,F_2(t)y_2) \| \leqslant l_3|G_2(t)| \cdot \| y_2 \| + l_4|\overline{G}_2(t)|,$$

其中 l_3,l_4 为非负常数. 由定理 1 可知(2.5)至少存在一个 w-周期解,代入(2.4)则得(1.3)的一个 w-周期解.

由推论 1,仿定理 2 的证明可得

推论 2 考虑方程

$$\dot{x} = A(t)x + g(t,x), \tag{2.6}$$

如果下列条件成立

(i) $A(t+w) \equiv A(t)$ 为 R 上 $n \times n$ 连续矩阵函数. $g(t+w,x) \equiv g(t,x)$ 关于 $(t,x) \in R \times R^n$ 连续;

(ii) $\dot{x} = A(t)x$ 的零解渐近稳定;

(iii) $\| g(t,x) \| \leqslant |G(t)| \cdot \| x \| + |\overline{G}(t)|$,且 $\int^{+\infty} |G(t)|dt < +\infty$, $|\overline{G}(t)| \leqslant M$ (正常数).

则(2.6)至少存在一个 w-周期解.

推论 3 考虑

$$\dot{x} = A(t)x + p(t), \tag{2.7}$$

其中 $A(t+w) \equiv A(t)$ 为 R 上 $n \times n$ 连续矩阵函数, $p(t+w) \equiv p(t)$ 为 R 上 n 维连续向量函数. 如果 $\dot{x} = A(t)x$ 的零解渐近稳定. 则(2.7)至少有一个 w-周期解.

参 考 文 献

[1] R. Reissig, G. Sansone, R. Conti, *Nonlinear Differential Equations of High Order*, Noordhoof International publishing, 1974.

[2] 张棣、赵晓强、高占海,空间周期解的理论及其应用,南京大学学报数学半年刊,1987.

[3] 李林、彭晓林、吴晓非等,空间周期解报告文集,西北大学数学系,1987.

[4] 秦元勋、王联等,运动稳定性理论与应用,科学出版社,1981.

Periodic Solution for a Class of Higher Dimensioal Non-autonomous System

Wu Xiaofei

(Zhengzhou Inst. of Light Industy, 450002)

Li Lin

(Beijing Institute of Petro-Chemical Technology)

Abstract

We study the problem of existence of the periodic solutions for a class of higher dimensional non-autonomous system and extend a previous result in [1].

Keywords periodic solution, system, stable.