概周期系统概周期解的存在唯一性*

冯　春　华

(广西师范大学数学系，桂林 541004)

摘　要　应用构造 Ляпунов 函数的方法，讨论了非线性微分方程系概周期解的存在唯一性. 同时给出了 Liénard 方程存在唯一概周期解的一组充分条件.

关键词　概周期系统，Ляпунов 函数，概周期解.

分类号　AMS(1991) 34C27/CCL O175.14

考虑概周期微分方程系

$$\dot{x}=f(t,x), \tag{1}$$

这里 $f(t,x)\in C(R\times R^n,R^n)$，$R=(-\infty,+\infty)$，$f(t,x)$ 是关于 t 对 x 一致概周期的.

文[1]定理 19.1 应用构造 Ляпунов 函数的方法，在假定系统(1)存在一个有界解的条件下，研究了系统(1)概周期解的存在唯一性. 但是，对于一个非线性系统，要确定它存在一个有界解，本身仍是一个比较困难的问题，而且没有一般的方法. 本文去掉系统(1)存在一个有界解的限制，直接运用构造 Ляпунов 函数，讨论了系统(1)概周期解的存在唯一性.

相应于系统(1)，讨论(1)的相伴系统

$$\dot{x}=f(t,x),\quad \dot{y}=f(t,y). \tag{2}$$

定理 1　假定存在一个定义在 $I\times D\times D$ (D 是 R^n 中的开集)上的 Ляпунов 函数 $V(t,x,y)$，满足下列条件：

(Ⅰ)　$a(\|x-y\|)\leqslant V(t,x,y)\leqslant b(\|x-y\|)$，其中 $a(r)$，$b(r)$ 是连续、递增、正定的；

(Ⅱ)　$\|V(t,x_1,y_1)-V(t,x_2,y_2)\|\leqslant k\{\|x_1-x_2\|+\|y_1-y_2\|\}$，$k>0$ 为常数；

(Ⅲ)　$\dot{V}_{(2)}(t,x,y)\leqslant-\beta(t)V(t,x,y)$. 这里 $\beta(t)$ 为连续函数，满足 $\int_0^{+\infty}\beta(t)dt=+\infty$. 则系统(1)存在唯一的概周期解.

证明　首先证明在定理条件下，系统(1)至少存在一个有界解.

设 $\varphi(t)$ 是系统(1)的一个解，要证明 $\varphi(t)$ 有界. 注意(1)是概周期系统，故仅须证明，存在常数 $D>0$，使对充分大的 t 有 $|\varphi(t)|\leqslant D$，从而对所有的 t，$\varphi(t)$ 有界，比如说 $|\varphi(t)|\leqslant D+1$ ($t\in I$). 用反证法. 若不然，则无论对多么大的正数 M，存在序列 $\{t_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时 $t_n\to+\infty$ 使 $|\varphi(t_1)|<\frac{M}{2}$，而对某个 k 有 $|\varphi(t_k)|=M$，对所有 $i>k$ 有 $|\varphi(t_i)|>M$(如果有必要，可以取 $\{t_n\}$ 的子列 $\{t_{n_i}\}$ 使 $n_i>k$ 时有 $|\varphi(t_{n_i})|>M$，不妨仍记此子列为 $\{t_n\}$). 因为 $\int_0^{+\infty}\beta(t)dt=+\infty$，对上述 $\{t_n\}$,

* 1992年7月5日收到.

可以选取 $m>k$ 使 $b(2M)e^{-\int_0^m \beta(\tau)d(\tau)}<a(\frac{M}{2})$. 由条件(Ⅱ),(Ⅲ)可以推得

$$V(t_m,\varphi(t_m),\varphi(t_1))\leqslant e^{-\int_0^m \beta(\tau)d\tau}V(0,\varphi(0),\varphi(t_1))\leqslant e^{-\int_0^m \beta(\tau)d\tau}b(2M)<a(\frac{M}{2}).$$

由条件(Ⅰ)有 $|\varphi(t_m)|<|\varphi(t_1)|+\frac{M}{2}<M$,矛盾!因此,系统(1)至少存在一个有界解,不妨就设为 $\varphi(t)$,其界为 B,即 $|\varphi(t)|\leqslant B\ (t\in I)$.

再证,$\varphi(t)$是渐近概周期的. 假设$\{\tau_k\}$是一序列,使得 $k\to\infty$ 时 $\tau_k\to\infty$. 记 $\varphi_k(t)=\varphi(t+\tau_k)$,则 $\varphi_k(t)$是 $\dot{x}=f(t+\tau_k,x)$的经过$(0,\varphi(\tau_k))$的解,因为 $f(t,x)$是概周期的,故对 R^n 中任一紧集 S,存在$\{\tau_k\}$的一个子序列,仍用$\{\tau_k\}$表示,使得 $k\to\infty$时 $f(t+\tau_k,x)$一致收敛于 $R\times S$. 对于任给的 $\varepsilon>0$,选取足够大的整数 $k_0(\varepsilon)$,使得如果 $m\geqslant k>k_0(\varepsilon)$就有

$$b(2B)e^{-\int_0^{t+\tau_k}\beta(\tau)d\tau}\leqslant a(\varepsilon)/2 \tag{3}$$

和在 $R\times S$ 上,

$$|f(t+\tau_k,x)-f(t+\tau_m,x)|<a(\varepsilon)/2k. \tag{4}$$

从条件(Ⅱ),(Ⅲ)可推得

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,\varphi(t),\varphi(t+\tau_m-\tau_k))\leqslant &-\beta(t)V(t,\varphi(t),\varphi(t+\tau_m-\tau_k))\\ &+k\,|f(t+\tau_m-\tau_k,\varphi(t+\tau_m-\tau_k)\\ &-f(t,\varphi(t+\tau_m-\tau_k))))|.\end{aligned} \tag{5}$$

因为 $\varphi(t+\tau_m-\tau_k)$是 $\dot{x}=f(t+\tau_m-\tau_k,x)$的解,从而有

$$\dot{V}(t,\varphi(t),\varphi(t+\tau_m-\tau_k))\leqslant-\beta(t)V(t,\varphi(t),\varphi(t+\tau_m-\tau_k))+a(\varepsilon)/2,$$

即

$$V(t+\tau_k,\varphi(t+\tau_k),\varphi(t+\tau_m))\leqslant e^{-\int_0^{t+\tau_k}\beta(\tau)d\tau}V(0,\varphi(0),\varphi(\tau_m-\tau_k))+\frac{a(\varepsilon)}{2}. \tag{6}$$

于是当 $m\geqslant k>k_0(\varepsilon)$时,就有

$$V(t+\tau_k,\varphi(t+\tau_k),\varphi(t+\tau_m))<a(\varepsilon), \tag{7}$$

故对所有 $t\geqslant0$,总有

$$|\varphi(t+\tau_k)-\varphi(t+\tau_m)|<\varepsilon \tag{8}$$

对 $m\geqslant k>k_0(\varepsilon)$时成立. 这表明 $\varphi(t)$是渐近概周期的. 由[2],系统(1)具有概周期解 $p(t)$,它以 B 为界. 利用 $V(t,x,y)$,可知 $p(t)$是概周期解.

应当指出,用定理 1 去判定给定系统概周期解的存在唯一性时显得简单,省去了验证系统解的有界性. 例如考虑 Liênard 方程

$$\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)h(\dot{x})=p(t), \tag{9}$$

假设(9)中出现的函数均连续且满足解的存在唯一性条件,$p(t)$是 t 的概周期函数.

(9)的等价系统为

$$\begin{cases}\dot{x}=H(y)-F(x)+E(t),\\ \dot{y}=-g(x),\end{cases} \tag{10}$$

这里 $H(y)=\int_0^y h(u)du$,$F(x)=\int_0^x f(u)du$,$E(t)=\int_0^t p(s)ds$.

(10)的相伴系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = H(y) - F(x) + E(t), \\ \dot{y} = -g(x), \\ \dot{u} = H(v) - F(u) + E(t), \\ \dot{v} = -g(u). \end{cases} \tag{11}$$

记

$$A = A(y,v) = \begin{cases} \dfrac{H(y) - H(v)}{y - v} & (y \neq v), \\ h(y) & (y = v); \end{cases}$$

$$B = B(x,u) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(u)}{x - u} & (x \neq u), \\ f(x) & (x = u); \end{cases}$$

$$C = C(x,u) = \begin{cases} \dfrac{g(x) - g(u)}{x - u} & (x \neq u), \\ \dfrac{dg}{dx} & (x = u), \end{cases}$$

则 A,B,C 都是 t 的函数. 假设 A,B,C 满足下述条件:

(i) $0<\alpha_0\leqslant A\leqslant 1$;

(ii) $0<\beta_0\leqslant B\leqslant \beta_1$;

(iii) $0<C<\gamma(\gamma<\beta_0^2)$且$(1-\sqrt{2A-A^2})\beta_1^2<2C<(1+\sqrt{2A-A^2})\beta_0^2$.

定理 2 假设条件(i)至(iii)成立,则系统(10)亦即系统(9)存在唯一的概周期解.

证明 文[3]引理 2.2 指出,若 $0<\beta_0\leqslant B(t)\leqslant\beta_1$,则方程 $\dot{Z}=(B(t)-Z)Z$ 有对一切 t 满足 $\beta_0\leqslant Z(t)\leqslant\beta_1$ 的解 $Z(t)$. 构造 Ляпунов 函数

$$W(t,x,y,u,v) = \frac{1}{2}\{(y-v)^2 + [(y-v) - Z(x-u)]^2\},$$

易见 $W(t,x,y,u,v)$满足定理 1 的条件(Ⅰ),(Ⅱ),由于

$$\dot{W}_{(11)}(t,x,y,u,v) = -Z(Z^2 - C)\{[(x-u) - \frac{Z^2 + AZ^2 - 2C}{2(Z^2 - C)Z}(y-v)]^2 - \frac{(1-A)^2 Z^4 - 4CZ^2 + 4C^2}{4(Z^2 - C)^2 Z^2}(y-v)^2\}, \tag{12}$$

由条件(iii)有

$$Z^2 - C \geqslant \beta_0^2 - \gamma > 0. \tag{13}$$

若 $A<1$,则由 $0<\beta_0\leqslant Z\leqslant\beta_1$ 以及(12),(13)两式得 $\dfrac{2C-2C\sqrt{1-(1-A)^2}}{(1-A)^2}<Z^2<\dfrac{2C+2C\sqrt{1-(1-A)^2}}{(1-A)^2}$. 故$(1-A^2)Z^4-4CZ^2+4C^2<0$,即 $\dot{W}$ 满足定理 1 中的条件(Ⅲ). 若 $A=1$,明显地条件(Ⅲ)仍成立. 故由定理 1 知定理 2 的结论成立.

注 定理 2 的条件可以实现,例如方程

$$\ddot{x} + (\frac{15}{8} + \frac{1}{8}xe^{-x^2})\dot{x} + (\frac{3}{5}x + xe^{-x^2})(1 - \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\dot{x}) = \sqrt{2}\sin\sqrt{2}t, \tag{14}$$

(14)的等价系统

$$\begin{cases} \dot{x} = (1 - \frac{\sqrt{2}}{3})y + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin y + \frac{1}{16}e^{-x^2} - \frac{15}{8}x - \cos\sqrt{2}t, \\ \dot{y} = -(xe^{-x^2} + \frac{3}{5}x) \end{cases}, \tag{15}$$

其中

$$h(y) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\cos y > 0,$$

$$g(x) = xe^{-x^2} + \frac{3}{5}x,$$

$$H(y) = (1 - \frac{\sqrt{2}}{3})y - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin y,$$

$$F(x) = \frac{15}{8}x - \frac{1}{16}e^{-x^2}.$$

易知 $0<A\leqslant 1$，$\frac{7}{4}\leqslant B\leqslant 2$，$0<C<\frac{8}{5}$，$A$，$B$，$C$ 满足定理 2 的条件(i)，(ii)，(iii)，因此由定理 2 知系统(15)亦即方程(14)存在唯一的概周期解.

参 考 文 献

[1] T. Yoshizawa, *Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions*, Springer-Verlag, 1975.

[2] W. A. Coppel, *Almost periodic properties of ordinary differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl., 76(1967), 27—49.

[3] C. E. Langenhop and G. Seifert, *Almost periodic solutions of second order nonlinear differential equations with periodic forcing*, Proc. Amer. Math. Soc., 10(1959), 425—432.

[4] 姜东平，强迫 Mathieu 方程的概周期解，南京大学学报，21(9)1985，407—420.

On the Existence and Uniqueness of Almost Deriodic Solutions for Almost Periodic Differential Equation Systems

Fen Chunhua

(Dept. of Math., Guangxi Normal University, Guilin 541004)

Abstract

In this paper, the existence and uniqueness of almost periodic solutions for some nonlinear differential equation systems are studied by using the method of constituting Liapunov function. A sufficient condition is obtained for the existence and uniqueness of almost periodic solution of Lienard equation.

Keywords almost periodic system, Liapunov function, almost periodic solution.