通过非均匀介质流体的渗流问题*

罗德斌　　　　李清溪
(武汉城市建设学院基础科学系，430074)　(武汉大学数学系，430072)

摘　要　本文讨论三维情形的渗流问题.考虑在坝体形状不规则，且介质不均匀的情况下，将渗流现象归结为线性椭圆方程的自由边值问题.应用变分不等方程理论，证明了解的存在和唯一性.

关键词　渗流问题，弱形式，变分不等方程.

分类号　AMS(1991) 35J20,35B65/CCL O175.25

一　问题提出

流体在多孔介质中流动的研究，导出了线性椭圆方程问题.一般地，讨论的区域边界是完全固定的，可是由渗流问题引起的区域边界有一条待定的边界，这就给问题求解造成困难.特别是现代大型水坝的修造，要求解三维情形，虽然已有了较严密的处理方法，但所解问题有一定的局限和特殊.在文[1]中，研究限制在二维情形，文[2]却要求介质是均匀的.本文对三维不均匀介质的渗流问题，研究其解的存在与唯一性.

设有一水坝 D，它的厚度是变化的，和坝相连的侧面是垂直的(见图1).在其内引进坐标系 $Oxyz$，其中 z 为垂直于坝的两侧，方向朝上；y 为坝内液体之渗流方向；x 为垂直于坝体的方向.设坝体由两种不同的物质组成，对应的渗透系数分别为 k_1 和 k_2($k_1<k_2$，均为常数).此时坝体 D 由二部分 D_1 和 D_2 组成，分别表示为

$$D=\{(x,y,z)\,|\,0<x<a,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x),0<z<H\},$$
$$D_1=\{(x,y,z)\,|\,0<x<a,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x),0<z<H^*\},$$
$$D_2=\{(x,y,z)\,|\,0<x<a,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x),H^*<z<H\},$$

这里 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)\in C^2[0,a]$，且 $\varphi_1'(0)=\varphi_1'(a)=\varphi_2'(0)=\varphi_2'(a)=0,\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)$.

由于坝体内渗流存在，使得上下游连结起来，令其上下游水位分别为 H 和 h，用 Γ_0 和 Γ_5 表示坝的底部和顶部：

$$\Gamma_0=\{(x,y,z)\,|\,0<x<a,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x),z=0\},$$
$$\Gamma_5=\{(x,y,z)\,|\,0<x<a,\varphi_1(x)<y<\varphi_2(x),z=H\}.$$

用 $z=g(x,y),(x,y)\in\overline{\Gamma}_0$ 表示浸润面 Γ_λ，它满足

$$\left.\begin{array}{l}g:\overline{\Gamma}_0\to[0,H],\\ g(x,\varphi_1(x))=H\text{ 和 }g(x,\varphi_2(x))\geqslant h,\ 0<x<a.\end{array}\right\}.\tag{1}$$

* 1993年6月14日收到.

因此，坝内的渗流区域则为

$$\Omega=\{(x,y,z)\in D\,|\,0<z<g(x,y)\}.$$

置

$$\Gamma_1=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,y=\varphi_1(x),0\leqslant z\leqslant H\},$$
$$\Gamma_2=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,y=\varphi_2(x),0\leqslant z\leqslant h\},$$
$$\Gamma_2^+=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,y=\varphi_2(x),h\leqslant z\leqslant g(x,\varphi_2(x))\},$$
$$\Gamma_3=\{(x,y,z)\,|\,x=0,\varphi_1(0)\leqslant y\leqslant \varphi_2(0),0\leqslant z\leqslant g(0,y)\},$$
$$\Gamma_4=\{(x,y,z)\,|\,x=a,\varphi_1(a)\leqslant y\leqslant \varphi_2(0),0\leqslant z\leqslant g(a,y)\}.$$

由上可知，坝内流场分为上下两层 D_1 和 D_2，其间存在衔接面

$$\Gamma_c=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),\ z=H^*\}.$$

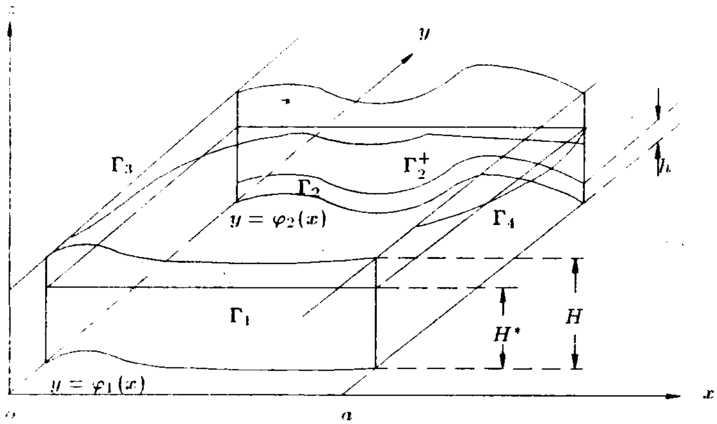

图 1

根据 Darcy 定律，坝内的渗流过程归结如下

问题 求函数 $z=g(x,y)$ 满足(1)，并存在唯一函数 $P(x,y,z)$ 满足：

1° 方程

$$\operatorname{div}k\operatorname{grad}(\frac{P}{\gamma}+z)=0,\quad k=\begin{cases}k_1,\ (x,y,z)\in D_1\cap\Omega,\\ k_2,\ (x,y,z)\in D_2\cap\Omega;\end{cases}\tag{2}$$

2° 边值条件

$$P|_{\Gamma_1}=\gamma(H-z),\ P|_{\Gamma_2}=\gamma(h-z),\ P|_{\Gamma_2^+}=0,\tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(\frac{P}{\gamma}+z)|_{\Gamma_0}=0,\ \frac{\partial}{\partial n}(\frac{P}{\gamma}+z)|_{\Gamma_3}=0,\ \frac{\partial}{\partial n}(\frac{P}{\gamma}+z)|_{\Gamma_4}=0,\tag{4}$$

$$P|_{\Gamma_\lambda}=0,\ \frac{\partial}{\partial n}(\frac{P}{\gamma}+z)|_{\Gamma_\lambda}=0;\tag{5}$$

3° 衔接条件

$$P_1|_{z=H^*}=P_2|_{z=H^*},\ k_1\frac{\partial P_1}{\partial z}|_{z=H^*}=k_2\frac{\partial P_2}{\partial z}|_{z=H^*},\tag{6}$$

其中 $P_1=P|_{\Omega\cap D_1}$，$P_2=P|_{\Omega\cap D_2}$. 问题(1)－(6)就是对应不同介质水坝的渗流问题. 在这里，边

界有一部分 Γ_λ 是待定的，其上提出了两个边值条件(5)；并且还有衔接条件(6)，这同一般边值问题本质不同. 为了解它，首先将在 Ω 上的函数 $P(x,y,z)$ 拓展到整个区域 D 上，使其在 $D-\Omega$ 上，$P(x,y,z)=0$. 为简单计，取液体比重 $\gamma=1$.

问题(1)－(6)的弱形式 找函数 $P(x,y,z)\in H^1(D)$，使满足

$$P\geqslant 0,\quad \forall\,(x,y,z)\in\overline{D};\tag{7}$$

$$P=H-z,\quad 当\ 0\leqslant x\leqslant a,y=\varphi_1(x),0\leqslant z\leqslant H;\tag{8}$$

$$P=(h-z)^+,\quad 当\ 0\leqslant x\leqslant a,y=\varphi_2(x),0\leqslant z\leqslant H;\tag{9}$$

如果$(x_0,y_0,z_0)\in D$，$P(x_0,y_0,z_0)>0$，又 $0<z<z_0$，那么

$$P(x_0,y_0,z)>0;\tag{10}$$

如果令 $\Omega=\{(x,y,z)\in D\,|\,P(x,y,z)>0\}$，那么

$$\iiint_\Omega k\operatorname{grad}(p+z)\operatorname{grad}\psi dxdydz=0,\quad\forall\,\psi\in C^1(\overline{D}),\tag{11}$$

且 ψ 的值在 Γ_1 和 $\Gamma_2^*=\{(x,y,z)\,|\,0\leqslant x\leqslant a,y=\varphi_2(x),0\leqslant z\leqslant H\}$的邻域为 0.

式(10)表示：如用 $g(x,y)$表示使 $P(x,y,z)>0$ 的 z 的上界，则浸润面 Γ_λ 的方程为 $z=g(x,y)$. 应用 Green 公式可知：式(11)为(2)，(4)，(5)，(6)的弱表示，故称式(7)－(11)为问题(1)－(6)的弱形式. 下面主要证明它的可解性.

二 函数变换及在固定区域 D 上的弱形式

直接求解水坝的渗流问题(7)－(11)，将是十分困难的. 这是因为在那里除关联到区域 D 外，还与区域 Ω 有关，而 Ω 是待知的. 本节将引进函数变换，把难处理的待定区域代以固定区域，从而为利用变分不等方程这一工具提供了基础.

设 $P(x,y,z)$为问题(7)－(11)的解. 令

$$\overline{P}(x,y,z)=\begin{cases}P(x,y,z), & 当(x,y,z)\in\overline{\Omega},\\ 0, & 当(x,y,z)\in\overline{D}-\overline{\Omega}.\end{cases}$$

在 $\overline{D}$ 上考虑变换

$$w(x,y,z)=\int_z^H k\overline{P}(x,y,t)dt.\tag{12}$$

因此，

$$\overline{w}\equiv w(x,y,0)=\int_0^H k\overline{P}(x,y,t)dt=\int_0^{g(x,y)}kP(x,y,t)dt.$$

可以证明[3]如下结论成立.

引理 1 如果函数 $l(x,y)$为问题

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}l=0,\tag{13}$$

$$l|_{\Gamma_1\cap\Gamma_0}=\int_0^H k(H-t)dt\quad(常数),\tag{14}$$

$$l|_{\Gamma_2\cap\Gamma_0}=\int_0^h k(h-t)dt\quad(常数),\tag{15}$$

$$\frac{\partial l}{\partial n}\Big|_{(\Gamma_3\cup\Gamma_4)\cap\Gamma_0}=0\tag{16}$$

的解，那么在 Γ_0 上 $\overline{w}(x,y)=l(x,y)$.

根据极值原理，在 Γ_0 有 $l(x,y)\geqslant 0$；并且用对称延拓，可将混合边值问题化为对应的第一边值问题讨论[2]，可知对 $\forall\ p<+\infty$，有

$$l(x,y)\in W^{2,p}(\Gamma_0).$$

通过具体运算，可得

引理 2　由式(12)定义的 $w(x,y,z)$ 满足

$$\iiint\limits_D \frac{1}{k}\operatorname{grad}w\operatorname{grad}(k\psi)dxdydz=-\iiint\limits_D k\chi_\Omega\psi dxdydz,$$

$\forall\ \psi\in C^\infty(D)$，且在 $\partial D-(\Gamma_3\cup\Gamma_4)$ 邻域为 0；其中

$$\chi=\begin{cases}1, & 当(x,y,z)\in\Omega,\\ 0, & 当(x,y,z)\in D-\Omega.\end{cases}$$

容易看出，引理 2 的结论对任意在 $\partial D-(\Gamma_3\cup\Gamma_4)$ 上为 0 的函数 $\psi\in H^1(D)$ 也是成立的.

现在，置

$$\theta=\begin{cases}\int_z^H k(H-t)dt, & 在\ \Gamma_1,\\ \int_z^h k(h-t)dt, & 在\ \Gamma_2,\\ l(x,y), & 在\ \Gamma_0,\\ 0, & 在\ \partial D-(\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_0);\end{cases}$$

$$K=\{v\in H^1(D)\,|\,v|_{\partial D-(\Gamma_3\cup\Gamma_4)}=\theta,v\geqslant 0,\text{p.p.}于\ D\}.$$

定理 1　如果 $P(x,y,z)$ 为渗流问题(7)－(11)的解，则由(12)定义的 $w(x,y,z)$ 满足变分不等方程

$$w\in K:\iiint\limits_D\frac{1}{k}\operatorname{grad}w\operatorname{grad}k(v-w)dxdydz\geqslant\iiint\limits_D k(w-v)dxdydz,\quad\forall\ v\in K.\tag{17}$$

证明　首先从引理 1 知 $w\in K$. 现在设 $\zeta\in K$，那么 $\zeta-w\in H^1(D)$，且在 $\partial D-(\Gamma_3\cup\Gamma_4)$ 为 0. 因此，由引理 2，得

$$\iiint\limits_D\frac{1}{k}\operatorname{grad}w\operatorname{grad}k(\zeta-w)dxdydz=-\iiint\limits_D k\chi_\Omega(\zeta-w)dxdydz$$

$$=\iiint\limits_\Omega k(w-\zeta)dxdydz\geqslant\iiint\limits_D kwdxdydz-\iiint\limits_D k\zeta dxdydz$$

$$=\iiint\limits_D k(w-\zeta)dxdydz.$$

定理 1 和后面的定理 4 表明，渗流问题(7)－(11)，经过变换(12)化为在固定区域 D 上的变分不等方程问题，这对解决问题具有根本意义.

三　变分不等方程解的存在与唯一性

由函数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$ 的光滑性和函数 θ 的正则性推知 K 是空间 $H^1(D)$ 的非空闭凸集；又双线型 $\iiint\limits_D\frac{1}{k}\operatorname{grad}u\operatorname{grad}(kv)dxdydz$ 在 $H^1(D)$ 是有界和强制的，根据变分不等方程著名结果

[4]，有如下定理成立.

定理 2 变分不等方程(17)存在唯一解.

下面讨论变分不等方程解的正则性. 由于坝体介质渗透系数 k 不为常数，这给论证带来困难，为此，我们根据椭圆方程边值问题解的正则性结果，又注意变分不等方程与对应椭圆方程边值问题解之间的密切联系，可推得

引理 3 在 D 上变分不等方程问题(17)与边值问题

$$\begin{cases} \operatorname{div} \dfrac{1}{k} \operatorname{grad} u = f, & (18) \\ u = \theta, \quad \text{在 } \partial D - (\Gamma_3 \cup \Gamma_4) \text{ 上}, & (19) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \text{在 } \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \text{ 上} & (20) \end{cases}$$

解的正则性一致，其中 $f \equiv \operatorname{div} \dfrac{1}{k} \operatorname{grad} w \in L^{\infty}(D)$.

关于边值问题(18)－(20)，容易推知下面引理成立[2].

引理 4 如 $f \in L^p(D)$，则边值问题(18)－(20)的解 u 满足

$$u \in H^1(D), u|_{D_1} \in W^{2,p}(D_1), u|_{D_2} \in W^{2,p}(D_2), \ \forall\ p < +\infty.$$

由引理 4 和引理 3 便可得到变分不等方程(17)解的正则性结果.

四 渗流问题的可解性

从定理 1 和定理 2 立刻知道：

定理 3 渗流问题(7)－(11)的解是唯一的.

现在令 $w(x,y,z)$ 为变分不等方程(17)的解(根据定理 2 它是确定的)，并置

$$\Omega = \{(x,y,z) \in D \mid w(x,y,z) > 0\}. \tag{21}$$

对于这个 $w(x,y,z)$，由引理 3 和引理 4 可推知

$$\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \in H^1(D), \quad \frac{1}{k} \frac{\partial w}{\partial z} \in H^1(D). \tag{22}$$

定理 4 设 $w(x,y,z)$ 为变分不等方程(17)的解；在(21)的规定下，定义函数

$$P(x,y,z) = -\frac{1}{k} w_z(x,y,z); \tag{23}$$

则 $P(x,y,z)$ 为渗流问题(7)－(11)的解.

证明 首先由(21)，(22)，通过验算可知 $-\dfrac{1}{k} w_z(x,y,z)$ 为方程

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial z} (\geqslant 0, \text{这是因为 } k_1 < k_2)$$

在区域 D 上一混合边值问题的解(弱)，根据极值原理[2]，得 $-\dfrac{1}{k} w_z(x,y,z) \geqslant 0$，即为式(7). 至于(8)，(9)二式显然成立.

现在验证(10). 用反证法. 假如对 $P(x,y,z_0) > 0$ 存在 $z_1 \in (0, z_0)$ 使得 $P(x,y,z_1) = 0$，那么 $w_z(x,y,z)|_{z=z_1} = 0$，因而 $w(x,y,z)$ 对 z 在 $z = z_1$ 达到极小值；但 $w_z \leqslant 0$，所以只能是 $w_z(x,$

$y, z)|_{z=z_0}=0$，这与 $P(x, y, z_0)>0$ 矛盾.

由上可知，由(21)确定的 Ω，即是(11)式所指的开区域.

最后验证式(11). 对任意属于 $C^2(\overline{D})$，并在 Γ_1 和 Γ_2^* 邻域为 0 的函数 φ，有

$$\iiint_{\Omega} k\operatorname{grad}(p+z)\operatorname{grad}\varphi dxdydz = \iiint_{\Omega} [-w_{xz}\varphi_x - w_{yz}\varphi_y + k(1-\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{k}w_z))\varphi_z]dxdydz$$

$$= \iiint_{\Omega} [-w_{xz}\varphi_x - w_{yz}\varphi_y + w_{xx}\varphi_z + w_{yy}\varphi_z]dxdydz$$

$$= \iiint_{D} [-w_{xz}\varphi_x - w_{yz}\varphi_y + w_{xx}\varphi_z + w_{yy}\varphi_z]dxdydz$$

$$= \iiint_{D} [w_z\varphi_{xz} + w_y\varphi_{yz} - w_x\varphi_{xz} - w_y\varphi_{yz}]dxdz - \iint_{\partial D}[w_z\varphi_x + w_y\varphi_y]\cos(n,z)d\sigma$$

$$+ \iint_{\partial D} w_x\varphi_z\cos(n,x)d\sigma + \iint_{\partial D} w_y\varphi_z\cos(n,y)d\sigma = 0.$$

上式是对属于 $C^2(\overline{D})$的函数 φ 论证的，根据稠密性，对属于 $C^1(\overline{D})$，而在 Γ_1 和 Γ_2^* 邻域为 0 的任何函数 φ 也是成立的.

参 考 文 献

[1] C. Baiocchi, V. Comincioli, E. Magenes, G. A. Pozzi, *Free boundary problems in the theory*, etc. Ann. Matem. Pural. Appl., 96(1973).

[2] Г. Стампаккья, О Фильтрапии Жидкости Чepez Пористую Сpeлy С Переnенным Сечением, У МН, 29 (1974).

[3] P. A. Raviard, *Cours D'Analyse Numerique*, Ecole Polytechnique, 1975.

[4] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An Introduction to Variation Inequalities and Their Applications*, Academic Press Inc., 1980.

On Fluid Flow Through Porous Media With Different Permeability

Luo Debin

(Wuhan Urban Construction Institute, 430074)

Li Qingxi

(Dept. of Math., Wuhan University, 430072)

Abstract

We consider the problems characterized by variable permeability in the theory of fluid flow through porous media, and prove the existence and uniqueness of solution for such problems.

Keywords permeability, weak form variational inequation.