第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

关于$L_X^1(\mu,\Sigma)$的完备性*

曾 韧 英
(重庆师范学院数学系，630047)

摘 要 设X是局部凸Fréchet空间，(Ω,Σ,μ)是非负有限测度空间，则$L_X^1(\mu,\Sigma)$是完备的，从而也是局部凸Fréchet空间.

关键词 局部凸Fréchet空间，广义Bochner积分，完备性.
分类号 AMS(1991) 46A04/CCL O177.3

设X是局部凸Fréchet空间，其拓扑T由X上一族连续半范数$P=\{p_n\}$生成，且对任给$x\in X$，有$p_1(x)\leqslant p_2(x)\leqslant\cdots\leqslant p_n(x)\leqslant\cdots$. 令

$$\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{p_n(x)}{1+p_n(x)},$$

则由$\|\cdot\|$作成的度量拓扑与T是一致的. 定义于(Ω,Σ,μ)上而在X中取值的广义Bochner可积函数的全体记作$L_X^1(\mu,\Sigma)$. 对每一个n，记$q_n(f)=\int_\Omega p_n(f)d\mu$，$mj$ $L_X^1(\mu,\Sigma)$依半范数族$Q=\{q_n\}$作成一个可度量化的局部凸空间，其平移不变的度量可设为

$$|||f|||=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{q_n(f)}{1+q_n(f)},\quad f\in L_X^1(\mu,\Sigma).$$

引理1 设$x_k\in X$，则下述等价

(i) 对每一个n，$\sum_{n=1}^{\infty}p_n(x_k)<+\infty$.

(ii) 存在正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$且$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{p_n(x_k)}{1+p_n(x_k)}<+\infty$.

X中的级数$\sum_{k=1}^{\infty}x_k$叫做绝对收敛的，如果$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<+\infty$.

引理2 X是完备的度量空间当且仅当X中的每一个绝对收敛级数皆收敛.

引理3 线性度量空间$(X,\|\cdot\|)$是完备的当且仅当拓扑向量空间(X,P)是完备的.

[1]证明了，当X是序列完备的局部凸空间时，$L_X^1(\mu,\Sigma)$不必是序列完备的. 而我们有

定理4 如果X是局部凸Fréchet空间，那么$L_X^1(\mu,\Sigma)$是完备的，从而也是局部凸Fréchet空间.

证明 由引理2,3，我们仅需证明$L_X^1(\mu,\Sigma)$中每一个绝对收敛级数皆收敛.

* 1992年3月29日收到.

设 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ 是 $L_X^1(\mu,\Sigma)$ 中的绝对收敛级数，即

$$\sum_{k=1}^{\infty} |||f_k||| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\frac{q_n(f_k)}{1+q_n(f_k)} < +\infty. \tag{1}$$

据此及引理 1 得到

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_n(f_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega p_n(f_k)d\mu < +\infty, \quad n=1,2,\cdots.$$

令

$$F_n(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} p_n(f_k(\omega)), \quad n=1,2,\cdots, \tag{2}$$

那么 $F_n(\omega)$ 是可积的实值函数，因此几乎处处有限．不妨假设在 Ω 上处处有 $F_n(\omega)<+\infty(n=1,2,\cdots)$．所以据引理 1，对给定的 $\omega_0\in\Omega$，存在正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$，使

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| f_k(\omega_0)\|_{\omega_0} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{p_n(f_k(\omega_0))}{1+p_n(f_k(\omega_0))} < +\infty.$$

注意到 $\|\cdot\|_{\omega_0} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_n(\cdot)}{1+p_n(\cdot)}$ 是 X 上平移不变的度量．由于 X 完备，从引理 2,3 知存在 $x_0\in X$，使得 $\lim_{t\to\infty}\|\sum_{k=1}^{t} f_k(\omega_0) - x_0\|_{\omega_0} = 0$.

记 $x_0=f(\omega_0)$，可以推知 $\lim_{t\to\infty}\|\sum_{k=1}^{t} f_k(\omega_0) - f(\omega_0)\| = 0$. 于是有函数 $f:\Omega\to X$ 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(\omega) = f(\omega), \quad \omega\in\Omega. \tag{3}$$

因为 $f_k(\omega)$ 是广义 Bochner 可积的，故存在简单函数列 $\{f_{k,l}(\omega)\}_{l=1}^{\infty}$ 使

$$\lim_{l\to\infty} f_{k,l}(\omega) = f_k(\omega),\ \mu-\text{a.e.}$$

及

$$\lim_{l\to\infty}\int_\Omega p_n(f_{k,l}-f_k)d\mu = 0, \quad n=1,2,\cdots$$

记 $g_{k,l}(\omega) = \sum_{i=1}^{k} f_{i,l}(\omega)$，则

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{l\to\infty} g_{k,l}(\omega) = f(\omega),\ \mu-\text{a.e.}$$

注意到这里 $g_{k,l}(\omega)$ 是简单函数 $(k,l=1,2,\cdots)$.

所以 f 是本质可分值的．不妨设 f 是可分值的，且设 $\{x_n\}$ 是 $f(\Omega)$ 的可数稠密子集．

记 $A_{n,k} = \{\omega\in\Omega: p_k(f(\omega)-x_n) < \frac{1}{k}\}$, $\quad n,k=1,2,\cdots$. 由下式定义函数 $g_k:\Omega\to X$

$$g_k(\omega) = \begin{cases} x_n, & \omega\in A_{n,k} - \bigcup_{m=1}^{n-1} A_{m,k}, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

那么当 $k\geqslant i$ 时有

$$p_i(f(\omega)-g_k(\omega)) \geqslant p_k(f(\omega)-g_k(\omega)) < \frac{1}{k},\ \mu-\text{a.e.}$$

因此有$\lim\limits_{k\to\infty}p_i(f(\omega)-g_k(\omega))=0,\mu-\text{a.e.}\ (i=1,2,\cdots)$,故

$$\lim_{k\to\infty}g_k(\omega)=f(\omega),\ \mu-\text{a.e.} \tag{4}$$

记$g_k(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}x_{k,j}\varphi(B_{k,j})$,其中$x_{k,j}\in\{x_n\}$,$B_{k,j}\in\Sigma$,且$B_{k,i}\cap B_{k,j}=\varnothing(i\neq j)$,$\varphi(B)$是集$B$的特征函数.

对任给的k,选取充分大的m_k使$\mu(\bigcup\limits_{j=m_k+1}^{\infty}A_{k,j})<\frac{1}{k}$.设$h_k(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{m_k}x_{k,j}\varphi(B_{k,j})$,则$\{h_k\}$是简单函数列且有$\mu\{\omega\in\Omega:\|h_k-g_k\|>0\}\leqslant\mu(\bigcup\limits_{j=m_k+1}^{\infty}B_{k,j})<\frac{1}{k}$,所以$\{\|g_k(\omega)-h_k(\omega)\|\}$依测度$\mu$趋于0,因而存在子列几乎处处趋于0,不妨假设$\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k(\omega)-h_k(\omega)\|=0,\mu-\text{a.e.}$,即

$$\lim_{k\to\infty}(h_k(\omega)-g_k(\omega))=0,\ \mu-\text{a.e.} \tag{5}$$

据(4),(5)有

$$\lim_{k\to\infty}h_k(\omega)=f(\omega),\ \mu-\text{a.e.} \tag{6}$$

又由(3)式有$p(f(\omega))\leqslant\sum\limits_{k=1}^{\infty}p(f_k(\omega))$,因而从引理1得

$$\int_{\Omega}p(f)d\mu\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\Omega}p(f_k)d\mu<+\infty,\ p\in P,$$

于是由文[3]定理2知f是广义Bochner可积的,也即$f\in L_X^1(\mu,\Sigma)$.这就证明了$L_X^1(\mu,\Sigma)$的完备性.

参 考 文 献

[1] L.Egghe, Pacific J. Math., 87(1980), No.2, 313—322.

[2] A.Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Space*, McGraw-Hill, Inc., 1978.

[3] Zeng Renying, *On the generalized Bochner integral*, J. of Math. Res. and Exp., 14(1994), 390.

[4] L.Egghe, *Proceeding of the conference on vector measures-dublin*, 1977. Lecture Note in Math. No.645, 77—90, Springer-Verlag, 1978.

[5] E.Sabb, C.R. Acad. Sci. Paris, 283(1976), 899—902.

The Completeness of $L_X^1(\mu,\Sigma)$

Zeng Renying

(Dept. of Math., Chongqing Teachers' College, Sichuan 630047)

Abstract

Let X be a locally convex Fréchet space, and (Ω,Σ,μ) a finite nonegative measure space. In this paper, we show that $L_X^1(\mu,\Sigma)$ is complete, and so it is a locally convex Fréchet space.

Keywords locally convex Fréchet space, generalized Bochner integral, completeness.