第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

泛函的一种次微分及其应用*

边文明　李文林
(河南师范大学数学系，新乡 453002)

摘　要　本文定义了赋范线性空间上泛函的一种新型集值导数(γ-次微分)，讨论了它的一些性质及其在非光滑数学规划问题上的一些应用.

关键词　赋范线性空间，γ-次微分，非光滑多目标规划.
分类号　AMS(1991) 90C29,49J52/CCL O224

1 引　言

近年来，函数的集值导数的研究非常活跃，继 Clarke 广义梯度[1]出现以来，又提出了许多新的概念，如 ε-次微分[3]，次导数[2]，γ-次微分[4,6]等等，然而它们也各有其局限性. 因此，为适应更广泛的要求，有必要研究新的集值导数.

本文，给出了赋范线性空间上泛函的一种广义次微分，讨论了它的一些性质，它是[4,6]中相应内容的改进和推广. 利用这种 γ-次微分讨论了非光滑多目标规划问题的弱有效解的必要条件和存在范围等.

以下始终假设 E 为赋范线性空间(特殊指出时除外)，E^* 表示 E 的共轭空间. $S=\{x\in E:\|x\|=1\}$，$\gamma:E\to R_+\stackrel{\triangle}{=}(0,+\infty)$为连续的正值泛函，并且对任意 $v\in E$，都存在连续泛函 γ_v^-：$E\to R_+$满足如下条件：

$$\gamma(x-\gamma_v^-(x)v)=\gamma_v^-(x),\quad \forall\, x\in E. \tag{1}$$

显然，$\gamma(x)\equiv c$(常数)时，$\gamma_v^+(x)\equiv c(\forall\, v\in E)$. 又，对任意 $x,y\in E$. 记

$$[x,y]=\{hx+(1-h)y:h\in[0,1]\}.$$

2 γ-次微分

本节考察实泛函 $f:D_f\subset E\to R$，其中 D_f 为 E 中的凸集.

定义 1[2]　设 $x\in D_f$，$v\in E$，令

$$\partial_\gamma f(x;v)=\left\{x^*\in E^*:\begin{array}{c}\text{存在 } x_i(i=1,2),x\in[x_i,\gamma(x_i)v]\subset D_f\\ \gamma(x_1)x^*(v)\leqslant f(x_1+\gamma(x_1)v)-f(x_1)\\ \gamma(x_2)x^*(v)\geqslant f(x_2+\gamma(x_2)v)-f(x_2)\end{array}\right\},$$

* 1994年6月13日收到. 95年9月23日收到修改稿. 国家自然科学基金资助项目.

称 $\partial_\gamma f(x;v)$ 为 f 在 x 处沿方向 v 的 γ-方向次微分.

当 $E=R$ 时,显然 $\partial_\gamma(x;1)$ 就是[4]中所讨论的次微分,并且 $\partial_\gamma f(x;1)=\partial_{\gamma_1}-f(x;-1)$.

当 $\gamma(x)\equiv c$ 时,易知[6]:$\partial_\gamma f(x;1)=\partial_\gamma f(x;-1)$.

定义 2 称 f 在 $x\in D_f$ 处的 γ-次微分为:$\partial_\gamma f(x)=\bigcap\limits_{v\in S}\partial_\gamma f(x;v)$.

下面给出 γ-次微分的一些性质.

定理 1 1) $\partial_\gamma(\lambda f)(x)=\lambda\partial_\gamma f(x)$, $\forall\ \lambda\in R$; 2) $\partial_\gamma f(x)$ 为凸集.

定理 2 若 f 满足下列两条件之一:

1) f 为有界函数,$\inf\limits_{x\in E}\gamma(x)=a>0$.

2) f 为 γ-Lipshitz 函数,即存在 $k>0$,使

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k\|x-y\|,\quad \forall\ x,y\in D_f\ \|x-y\|\geqslant\gamma(x)\text{ 或 }\gamma(y). \tag{2}$$

则 $\partial_\gamma f(x)$ 为相对弱 * 紧凸集. 若 f 连续,γ 为有界,D_f 为闭集,则 $\partial_\gamma f(x)$ 为弱 * 紧凸集.

证明 任取 $x^*\in\partial_\gamma f(x)$,则对任意 $v\in S$,存在 $\bar{x}\in D_f$,使得

$$|x^*(v)|\leqslant\frac{|f(\bar{x}+\gamma(\bar{x})v)-f(\bar{x})|}{\gamma(\bar{x})}\leqslant\begin{cases}\dfrac{2M_1}{a},M_1=\sup|f(x)|, & \text{若条件 1) 成立,}\\ k, & \text{若条件 2) 成立.}\end{cases}$$

于是 $\|x^*\|\leqslant\max\{\frac{2M_1}{a},k\}=M_2$. 令 $U=\{x\in E:\ \|x\|\leqslant\frac{1}{M_2}\}$,则当 $u\in U$ 时,

$$|x^*(u)|\leqslant\|x\|^*\cdot\|u\|\leqslant 1.$$

从而 $\partial_\gamma f(x)\subset U^0=\{x^*\in E^*:x^*(u)\leqslant 1,\forall\ u\in U\}$. 而由 Aloglu-Bourbaki 定理可知 U^0 为弱紧集,结合定理 1 的 2)便知,$\partial_\gamma f(x)$ 为相对弱紧凸集.

又,若 f 连续,γ 有界,任取 $x_n^*\in\partial_\gamma f(x)$,$x_n^*\xrightarrow{w^*}x^*\in E^*$,则对任意 $v\in S$,存在 x_n,y_n,使 $x\in[x_n,x_n+\gamma(x_n)v]\cap[y_n,y_n+\gamma(y_n)v]$,

$$\frac{f(y_n+\gamma(y_n)v)-f(y_n)}{\gamma(y_n)}\leqslant x_n^*(v)\leqslant\frac{f(x_n+\gamma(x_n)v)-f(x_n)}{\gamma_n}. \tag{3}$$

而且存在 $x_n=x-\lambda_n\gamma(x_n)v\to x-\lambda av$,$\bar{x}=x-\lambda av$,$x\in[\bar{x},\bar{x}+\gamma(\bar{x})v]$. 由(3)及 $x_n^*\xrightarrow{w^*}x^*$ 得:

$$x^*(v)\leqslant\frac{f(\bar{x}+\gamma(\bar{x})v)-f(\bar{x})}{\gamma(\bar{x})},$$

同理,据(3)式左端可知,存在 $\bar{y}$,$x\in[\bar{y},\bar{y}+\gamma(\bar{y})v]$,$x^*(v)\geqslant\frac{f(\bar{y}+\gamma(\bar{y})v)-f(\bar{y})}{\gamma(\bar{y})}$. 故 $x^*\in\partial_\gamma f(x;v)$,从而 $x^*\in\partial_\gamma f(x)$,即 $\partial_\gamma f(x)$ 弱闭集. 于是由前述,$\partial_\gamma f(x)$ 为弱 * 紧凸集.

推论 若 f 为 γ-Lipschitz 函数,k 为其 Lipschitz 常数,则当 $x^*\in\partial f(x)$ 时,$\|x^*\|\leqslant k$.

分别用 $\partial f(x)$,$\partial_c f(x)$ 表示 f 在 x 处的 Fenchel 次微分[5]及 Clarke 广义梯度[1],则它们和 γ-次微分有如下关系.

定理 3 1) 若 f 为凸函数,且对任意 $v\in S$,$x+\gamma(x)v$,$x-\gamma_v^-(x)v\in D_f$,则

$$\partial f(x)\subset\partial_\gamma f(x).$$

2) 若 f 为局部 Lipschitz 函数,$\gamma_n:E\to R_+$ 为一列连续的正值函数,且 $\gamma_n\xrightarrow{\text{等度}}0$,则:

$$\limsup_{n\to\infty}\partial_{\gamma_n}f(x)\subset\partial_c f(x).$$

证明 1) 任取 $x^*\in\partial f(x)$,则对任意 $y\in D_f$,$x^*(y-x)\leqslant f(y)-f(x)$. 对于 $v\in S$,分别

取 y 为 $x+\gamma(x)v$ 及 $x-\gamma_v^-(x)v$，得

$$\gamma(x)x^*(v)\leqslant f(x+\gamma(x)v)-f(x),$$
$$-\gamma_v^-(x)x^*(v)\leqslant f(x-\gamma_v^-(x)v)-f(x). \tag{4}$$

考虑到(1)式即知，(4)式等价于：

$$\gamma(x-\gamma_v^-(x)v)x^*(v)\geqslant f(x-\gamma_v^-(x)v+\gamma(x-\gamma_v^-(x)v)v)-f(x-\gamma_v^-(x)v).$$

于是 $x^*\in\partial_\gamma f(x)$，从而 $\partial_\gamma f\subset\partial_\gamma f(x)$.

2) 任取 $x^*\in\limsup\limits_{n\to\infty}p\,\partial_{\gamma_n}f(x)$，不妨设 $x^*\in\partial_{\gamma_n}f(x)(\forall\, n)$(否则取子列)，则对任意 $v\in S$ 存在 $x_n,y_n,x\in[x_n,x_n+\gamma_n(x_n)v]\cap[y_n,y_n+\gamma_n(y_n)v]$，使

$$\frac{f(y_n+\gamma_n(y_n)v)-f(y_n)}{\gamma_n(y_n)}\leqslant x^*(v)\leqslant\frac{f(x_n+\gamma_n(x_n)v)-f(x_n)}{\gamma_n(y_n)}. \tag{5}$$

仿定理 2 的相应部分可证，$\{x_n\}$有收敛子列，不妨仍记为$\{x_n\}$，于是 $\gamma_n(x_n)\to0,x_n\to x$，

$$x^*(v)\leqslant\limsup_{n\to\infty}\frac{f(x_n+\gamma_n(x_n)v)-f(x_n)}{\gamma_n(x_n)}\leqslant f^0(x;v),$$

其中 $f^0(x;v)$为 f 的广义方向导数[1]. 由 $f^0(x;v)$关于 v 的正齐次性，对任意 $v\in E$ 有：

$$x^*(v)=\|v\|x^*(\frac{v}{\|v\|})\leqslant\|v\|f^0(x;\frac{v}{\|v\|})=f^0(x;v).$$

故 $x^*\in\partial_c f(x)$，从而$\limsup\limits_{n\to\infty}\partial_{\gamma_n}f(x)\subset\partial_c f(x)$.

注 由(5)式易知，若 f 在 x 点是严格可微的，则$\langle\nabla f(x),v\rangle\leqslant x^*(v)\leqslant\langle\nabla f(x),v\rangle$，即 $x^*=\nabla f(x)$，从而$\limsup\limits_{n\to\infty}\partial_{\gamma_n}f(x)=\{\nabla f(x)\}$.

推论 若 f 为凸函数且在 x 附近 Lipschitz，$\{\gamma_n\}$如上述，则 $\partial f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\partial_{\gamma_n}f(x)$. 又若 $\gamma_n=c_n$(常数)，则 $\partial f(x)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\partial_{\gamma_n}f(x)$.

证明 由假设及[1，命题 2.2.7]和定理 3，

$$\partial f(x)=\lim_{n\to\infty}\partial_{\gamma_n}f(x).$$

当 $\gamma_n=c_n$ 时，不妨设$\{\gamma_n\}$单调减少，由 f 的凸性知，对任意 $y\in D_f,v\in S$ 及 $n\geqslant0$，有

$$\frac{f(y+\gamma_{n+1}v)-f(y)}{\gamma_{n+1}}\leqslant\frac{f(y+\gamma_n v)-f(y)}{\gamma_n}.$$

任取 $x^*\in\partial_{\gamma_{n+1}}f(x),v\in S,-v\in S$，存在 x_1,x_2 使 $x\in[x_1,x_1+\gamma_{n+1}v]\cap[x_2,x_2+\gamma_{n+1}(-v)]$，

$$x^*(v)\leqslant\frac{f(x_1+\gamma_{n-1}v)-f(x_1)}{\gamma_{n+1}}\leqslant\frac{f(x_1+\gamma_n v)-f(x_1)}{\gamma_n}, \tag{6}$$

$$x^*(-v)\leqslant\frac{f(x_2+\gamma_{n-1}(-v))-f(x_2)}{\gamma_{n+1}}\leqslant\frac{f(x_1+\gamma_n(-v))-f(x_1)}{\gamma_n}. \tag{7}$$

令 $x_2+\gamma_n(-v)=x_3$，则(7)式等价于：

$$x^*(v)\geqslant\frac{f(x_3+\gamma_n v)-f(x_3)}{\gamma_n}. \tag{8}$$

由(6)，(8)知 $x^*\in\partial\gamma_n f(x)$，$\partial_{\gamma_n}f(x)$关于 n 单调渐缩. 结合前证即知 $\partial f(x)=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\partial_{\gamma_n}f(x)$.

定理 4 若 f 连续，γ 为凹函数，则：$x^*\in\partial_\gamma f(x)$当且仅当：对任意 $v\in S$，存在 x_v，使

$$x \in [x_v, x_v + \gamma(x_v)v] \subset D_f, x^*(v) = \frac{f(x_v + \gamma(x_v)v) - f(x_v)}{\gamma(x_v)}.$$

证明 充分性显然，只须证明必要性.

若 $x^* \in \partial_\gamma f(x)$，则对任意 $v \in S$，存在 $x_1, x_2, x \in [x_i, x_i + \gamma(x_i)v] \subset D_f (i=1,2)$，使

$$\frac{f(x_1 + \gamma(x_1)v) - f(x_1)}{\gamma(x_1)} \leqslant x^*(v) \leqslant \frac{f(x_2 + \gamma(x_2)v) - f(x_2)}{\gamma(x_2)}.$$

应用连续函数介值定理知，存在 $x_v = hx_1 + (1-h)x_2$（其中 $h \in [0,1]$），使得 $x^*(v) = \frac{f(x_v + \gamma(x_v)v) - f(x_v)}{\gamma(x_v)}$. 又由 x_i 的取法可知，存在 $\lambda_i \in [0,1]$，$k \in [0,1]$，使得

$$x = x_i + \lambda_i \gamma(x_i)v. \tag{9}$$

$$\gamma(x_v) \geqslant h\gamma(x_1) + (1-h)\gamma(x_2) \geqslant \lambda_1 h\gamma(x_1) + \lambda_2(1-h)\gamma(x_2),$$

$$k\gamma(x_v) = \lambda_1 h\gamma(x_1) + \lambda_2(1-h)\gamma(x_2).$$

由(9)，$x \in [x_v, x_v + \gamma(x_v)v] \subset D_f$. 故结论得证.

注 显然定理 4 包含[4]中相应结论.

定理 5 若 $E = R^n$，D_f 闭凸，f 连续且下列两组条件之一成立：

1) f 为 γ-Lipschitz 函数，γ 为有界函数.

2) f，γ 均为有界函数，$\inf\limits_{x \in E} \gamma(x) > 0$.

则 $\partial_\gamma f(x)$ 关于 x 为弱*上半连续的.

证明 仿定理 2 的相应部分可以证明存在 $k>0$，使得 B_k 为紧集

$$\partial_\gamma f : D_f \to \{x^* \in E^* : \| x^* \| \leqslant k\} = B_k^*.$$

其次，任取 $x_n \to x$，$x_n^* \in \partial_\gamma f(x_n)$，$x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$，则对任意 $v \in S$，存在 $x_n' \in D_f$，$x_n \in [x_n', x_n' + \gamma(x_n')v] \subset D_f$，使得

$$x_n^*(v) = \frac{f(x_n' + \gamma(x_n')v) - f(x_n')}{\gamma(x_n')}. \tag{10}$$

不妨设 $x_n' \to x'$（否则取子列），于是 $x \in [x', x' + \gamma(x')v] \subset D_f$. 由(10)

$$x^*(v) = \frac{f(x' + \gamma(x')v) - f(x')}{\gamma(x')}.$$

由定理 4，定理 2 及[5，推论 3.1.9]知，$\partial_\gamma f(x)$ 关于 x 为弱*上半连续.

定理 6 设 $x \in D_f$ 且对任意 $v \in S$，均有 $x + \gamma(x)v, x - \gamma_v^-(x)v \in D_f$. 如果

$$f(y) \geqslant f(x), \quad \forall\, y \in \bigcup_{v \in S} [x - \gamma_v^-(x)v, x + \gamma_v^-(x)v],$$

则 $0 \in \partial_\gamma f(x)$；如果 f 又是连续的，则对任意 $v \in S$，存在 $x_v \in D_f$，使 $f(x_v) = f(x_v + \gamma(x_v)v)$.

证明 由假设即知，对任意 $v \in S$

$$0 \leqslant f(x + \gamma(x)v) - f(x), \tag{11}$$

$$0 \geqslant f(x) - f(x - \gamma_v^-(x)v). \tag{12}$$

记 $x - \gamma_v^-(x)v = x_3$. 则(12)式即

$$0 \geqslant f(x_3 + \gamma(x_3)v) - f(x_3). \tag{13}$$

从而 $0 \in \partial_\gamma f(x)$. 若 f 连续，由定理 4 便知对于 $v \in S$，存在 x_v，$f(x_v) = f(x_v) + \gamma(x_v)v)$.

3 应 用

考察非光滑多目标规划问题：

$$(\mathrm{P})\qquad \begin{array}{l}\min f(x)\\ g(x)\leqslant 0\\ h(x)=0,\end{array}$$

其中 $f:X\subset R^n\to R^p$，$g:X\to R^m$，$h:X\to R^q$，空间 $R^i(i=n,p,m,q)$ 中的顺序关系由正锥 $R^i_+=\{(x_1,\cdots,x_i):x_j\geqslant 0\}$ 分别决定.

记 $E=R^n$，$U_\gamma(x)=\bigcup\limits_{v\in S}[x,x+\gamma(x)v]$，$X_c=\{x\in X:g(x)\leqslant 0,h(x)=0\}$ 为容许集，$I(x)=\{j:g_j(x)=0\}$，$g_{I(x)}=(g_j)_{j\in I(x)}$.

下面给出问题(P)具有弱有效解的必要性条件及解的存在范围的两个结论.

定理 7 若 $\bar{x}$ 是(P)的(弱)有效解，并且 $\bigcup\limits_{v\in S}\{\bar{x}-\gamma_v^-(\bar{x})v,\bar{x}+\gamma(\bar{x})v\}\subset X_c$，则对任意 $u\in R^p_+$，均有 $0\in\partial_\gamma u^Tf(x)$.

证明 对 u^Tf 应用定理 1.6 即可.

定理 8 设 $\bar{x}\in X_c$，$u\in R^p_+$，$u\neq 0$，$w\in R_+^{(I(\bar{x})}$，$z\in R^q$，使得 $U_\gamma(\bar{x})\subset X_c\cap\{x:g_{I(\bar{x})}(x)=0\}$，并且函数 $H(x)=u^Tf(x)+w^Tg_{I(\bar{x})}(x)+z^Th(x)$ 满足如下条件

(i) $0\in\partial_\gamma H(\bar{x})$；

(ii) $x_2=x_1+\lambda v(v\in S,\lambda>0)$ 且 $H(x_1)\leqslant H(x_1+\gamma(x_1)v)$ 蕴含 $H(x_2)<H(x_2+\gamma(x_2)v)$.

则问题(P)的弱有效解只能在 $U_\gamma(\bar{x})$ 中.

证明 任取 $x_0=X_c\backslash U_\gamma(\bar{x})$，若 x_0 是(P)的弱有效解，则必有：

$$f(x_0)\leqslant f(x),\ \forall\ x\in U_\gamma(\bar{x}).$$

$$H(x_0)\leqslant H(x),\quad \forall\ x\in U_\gamma(\bar{x}).\tag{14}$$

记 $v=\dfrac{x_0-\bar{x}}{\|x_0-\bar{x}\|}$，则 $v\in S$，于是由条件(i)可知，存在 x'，使 $\bar{x}\in[x',x'+\gamma(x')v]\subset X$，

$$H(x'+\gamma(x')v)-H(x')\geqslant 0.$$

再根据条件(ii)便得到：

$$H(\bar{x})<H(\bar{x}+\gamma(\bar{x})v).\tag{15}$$

由 $x_0=\bar{x}+\|x_0-\bar{x}\|v$ 可知，存在 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，使得 $x_i+\gamma(x_i)v=x_{i-1}(i=1,\cdots,k)$ 且 $x_k\in[\bar{x},\bar{x}+\gamma(\bar{x})v]$. 于是由(15)式及条件(ii)可知，

$$H(x_k)<H(x_k+\gamma(x_k)v)=H(x_{k-1}),$$

类推可得：

$$H(x_k)<H(x_{k-1})<\cdots<H(x_1)<H(x_0).$$

而另一方面，由(14)式及 $x\in[\bar{x},\bar{x}+\gamma(\bar{x})v]$ 知，$H(x_0)\leqslant H(x_k)$，矛盾. 故结论成立.

参 考 文 献

[1] F. H. Clarke, *Optimatization and Nonsmooth Analysis*, Les Pub. CRM, Mont real, 1989.

[2] R. T. Rockafellar, *Generalized directional derivatives and subgradients of nonconvex functions*, Can. J. Math., 32(1980), 257—280.

[3] A. D. Loffe, *Calculs of Dini subdifferentials*, Nonl. Anal., 8(1984), 517—539.

[4] Hoang Xuan phu, *γ-subdifferential and γ-convexity of functions on the real line*, Appl. Math. Optim., 27(1993), 145—160.

[5] J. P. Auban, I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, Wiley, Yew York, 1984.

[6] 边文明、李文林，γ-次微分，γ-方向次微分及应用，工程数学学报，11(1994)，118—122.

A Kind of Subdifferentials and Its Applications

Bian Wenming　　*Li Wenlin*

(Dept. of Math., Henan Normal University, Xinxiang 453002)

Abstract

We propose a kind of set-valued differential (γ-subdifferential) of functions on normed linear spaces, and discuss its properties and applications to nonsmooth multiobjective programming problem.

Keywords normed linear space, γ-subdifferential, nonsmooth multiobjective programming.