第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

关于图 $C_n+\overline{K}_t$ 的和谐性*

邓 毅 雄
(华东交通大学基础课部，南昌 330013)

摘 要 本文证明了当 n 为奇数且 $(n,t+1)=1$ 时，如果集合 $M=\{ni-1|i=1,2,\cdots,t+1\}$，$N=\{(t+1)j|j=0,1,\cdots,n-1\}$ 满足 $M\cap N\neq\varnothing$ 时，图 $C_n+\overline{K}_t$ 是和谐图. 从而推广了 M. Keid 的结果：$C_n+\overline{K}_2$ 是和谐图.

关键词 图，和谐图，和谐标号.
分类号 AMS(1991) 05C78/CCL O157.5

1 引 言

设图 $G=(V,E)$ 是简单无向图，文中未定义术语参阅[1－2]. 在给出图的和谐性定义之前，我们先引入集合的取模运算.

定义 1 设 A,B 是两整数集，若 A 中所有元素关于整数 k 取模后恰为 B，则称 B 为 A 关于 k 的模，记为 $A\overset{\mathrm{mod}(k)}{=}B$.

定义 2 对图 G，若存在映射

$$h:V\to\{0,1,\cdots,|E|-1\}$$

满足：

(i) 若 $u\neq v$，则 $h(u)\neq h(v)$，$(u,v\in V)$；

(ii) $\{w(e)|w(e)=h(u)+h(v),e=uv\in E\}\overset{\mathrm{mod}(|E|)}{=}\{0,1,\cdots,|E|-1\}$；

(iii) 若 $e'\neq e''$，则 $w(e')\neq w(e'')$，$(e',e''\in E)$，

则称 G 是和谐图，其中 $h(v)$ 称为点 v 的和谐标号.

图 $C_n+\overline{K}_t$ 是圈 C_n 与完全图 K_t 的补图的联. 当 n 为奇数时，$C_n+\overline{K}_2$ 的和谐性已由 M. Reid 在私人通信中得到. 本文考虑在一定条件下 $C_n+\overline{K}_t$ 的和谐性，发展 M. Reid 的结果.

由数论基本知识，有

引理 1 不定方程 $ax+by=1$（a,b 为整数）有整数解的充要条件是 $(a,b)=1$. 且若 x_0,y_0 是其一组解，则解的一般形式为 $x=x_0-bs,y=y_0+as(s=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

对自然数 n 与 t，设集合

$$M=\{ni-1|i=1,2,\cdots,t+1\},$$
$$N=\{(t+1)j|j=0,1,\cdots,n-1\},$$

* 1993年10月18日收到. 江西省自然科学基金资助.

则有

引理2 若 $M\cap N\neq\varnothing$，则 $|M\cap N|=1$.

证明 要使 $M\cap N\neq\varnothing$，即存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,t+1\}$，$j_0\in\{0,1,\cdots,n-1\}$，使 $ni_0-1=(t+1)j_0$，即不定方程 $ni-(t+1)j=1$ 有整数解，由引理1，$(n,t+1)=1$，且解的一般形式为

$$i=i_0+(t+1)s,\quad j=j_0+ns(s=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

当 $s\neq 0$ 时，显然 $j=j_0+ns<0$（或 $>n$），即 $j=j_0+ns\notin\{0,1,\cdots,n-1\}$，故 $(t+1)j\notin N$，所以若 $M\cap N\neq\varnothing$，那么 M 与 N 只有唯一公共元素，即 $|M\cap N|=1$.

如易于验证当 n 为奇数，$t=3$ 时，M 与 N 有唯一公共元素，其中当 $n=4k+1$ 时，公共元素为 $n-1$；当 $n=4k+3$ 时，公共元素为 $3n-1$.

2 主要结论及其证明

定理 设 n,t 为自然数，且 n 为奇数，$(n,t+1)=1$. 如果前述定义的 M 与 N 满足 $M\cap N\neq\varnothing$，则图 $C_n+\overline{K}_t$ 是和谐图.

证明 设 $n=(t+1)k+r(0<r\leqslant t)$，由于 $(n,t+1)=1$，则 $(r,t+1)=1$. 由引理2设 $m_0=ni_0-1$ 是 $M\cap N$ 中的元素，则存在 j_0，使 $ni_0-1=(t+1)ki_0+ri_0-1=(t+1)j_0$，即 $ri_0-1=(t+1)(ki_0-j_0)$，则 $(t+1)\mid(ri_0-1)$，而且在集 $I=\{1,2,\cdots,t+1\}$ 中只有 i_0 满足此性质.

设 $C_n+\overline{K}_t$ 的点分别为：在 C_n 上的点依次记为 $u_0,u_1,\cdots,u_{n-1}$；在 $\overline{K}_t$ 中的点分别用 v_i 表示，其中 $i\in I-\{i_0\}$. 现如下给 $C_n+\overline{K}_t$ 的各点标号：

$$h(u_j)=(t+1)j,\quad j=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\{h(v_i),i\in I-\{i_0\}\}\overset{1-1}{\leftrightarrow}M-\{m_0\}.$$

下面验证标号 h 是和谐标号，即 $C_n+\overline{K}_t$ 为和谐图.

事实上，图 $C_n+\overline{K}_t$ 的边数 $q=|E|=(t+1)^2k+(t+1)r$. 首先注意到 $\max\{h(u_j)\}=(t+1)(n-1)$，$\max\{h(v_i)\}=(t+1)n-1$，均小于等于 $q-1$，且由引理2及标号法知：任意两点的标号互不相同，即 h 满足 $h:v\to\{0,1,\cdots,q-1\}$ 及定义(i).

又若记

$$A_0=\{(h(u_j)+h(u_{j+1})\mid j=0,1,\cdots,n-2\}\cup\{h(u_{n-1})\},$$

$$A_i=\{h(v_i)+h(u_j)\mid j=0,1,\cdots,n-1\},\ i\in I-\{i_0\},$$

那么，当 n 为奇数时，有

$$A_0=\{2(t+1)j+(t+1)\mid j=0,1,\cdots,(t+1)k+r-2\}\cup\{(t+1)^2k+(t+1)(r-1)\}$$

$$\overset{\bmod(q)}{=}\{(t+1)j\mid j=0,1,\cdots,(t+1)k+r-1\}.$$

设 $i=(t+1)-s,0\leqslant s\leqslant t$，则 $h(v_i)=ni-1=(t+1)^2k+(t+1)r-(t+1)ks-rs-1$，$A_i=\{(t+1)^2k+(t+1)(r-ks)-(rs+1)+(t+1)j\mid j=0,1,\cdots,(t+1)k+r-1\}$，对于给定的 s，总存在非负整数 m，使得

$$m(t+1)\leqslant rs+1\leqslant(m+1)(t+1)\quad(0\leqslant m\leqslant t).$$

由于 $i\neq i_0$，则 $(t+1)\nmid(rs-1)$，且 $ri-1=r(t+1)-(rs+1)$，故 $(t+1)\nmid(rs+1)$，从而上式为

$$m(t+1)<rs+1<(m+1)(t+1),\qquad(*)$$

则有

$$A_i \overset{\bmod(q)}{=} \{(m+1)(t+1)-(rs+1),(m+2)(t+1)-(rs+1),$$
$$\cdots,[(t+1)k+r+m](t+1)-(rs+1)\},$$
$$=\{j(t+1)-(rs+1)\mid j=(m+1),(m+2,\cdots,(t+1)k+r+m\}.$$

由(*)式有 $0<(m+1)(t+1)-(rs+1)<t+1$，则 A_i 与 A_0 关于 q 取模得到元素均不相同的集合. 注意到 A_i 中各元素成以 $(t+1)$ 为公差的等差数列. 下面证对任意 $i_1,i_2\in I-\{i_0\}$，若 $i_1\neq i_2$，则 A_{i_1} 与 A_{i_2} 中各元素也互不相等，为此只需证对应于 i_1 与 i_2 的 s_1 和 s_2 及 m_1 和 m_2，($s_1\neq s_2$)必有

$$(m_1+1)(t+1)-(rs_1+1)\neq(m_2+1)(t+1)-(rs_2+1),$$

即各 A_i 的最小元素互不相等即可. 事实上，若上式等号成立，则 $(m_1-m_2)(t+1)=r(s_1-s_2)$，由于 $t\geqslant s, r\geqslant 1$，则 $r(t+1)\geqslant rs+1>m(t+1)$，故 $r>m$，则 $r>m_1-m_2$，又因 $(t+1,r)=1$，从而 $(t+1)(m_1-m_2)$ 中不可能含有因子 r，因此式 $(m_1-m_2)(t+1)=r(s_1-s_2)$ 不可能成立.

由(*)式知 $1\leqslant(m+1)(t+1)-(rs+1)\leqslant t$，故当 i 取遍 $I-\{i_0\}$ 时，$(m+1)(t+1)-(rs+1)$ 恰取遍从 1 到 t 的整数，综上有

$$\bigcup_{\substack{i=0\\ i\neq i_0}}^{t+1} A_i \overset{\bmod(q)}{=} \{0,1,\cdots,(t+1)^2k+(t+1)r-1\},$$

所以标号 h 满足定义(ii)与(iii). 因此 h 为和谐标号，$C_n+\overline{K}_t$ 是和谐图.

利用此定理易知 $C_n+\overline{K}_3$（当 n 为奇数）是和谐图，据此方法还可以判断其它许多情况下 $C_n+\overline{K}_t$ 的和谐性. 从而发展了 M. Reid 的结果.

参 考 文 献

[1] F.哈拉里，图论，上海科学技术出版，1980.

[2] 柯召等，数论讲义(上)，高等教育出版社，1986.

[3] J. A. Gallian, *A Survy: Recent Results, Conjectures, and Open Problems in Labelling Graphs*, J. Graph Theory, 4(1989), 491—504.

On Harmoniousness of Graph $C_n+\overline{K}_t$

Deng Yixiong

(East China Jiaotong University, Nanchang, 330013)

Abstract

It is shown that if n is odd, $(n,t+1)=1$, and if the sets $M=\{ni-1\mid i=1,2,\cdots,t+1\}$ and $N=\{(t+1)j\mid j=0,1,\cdots,n-1\}$ satisfy $M\cap N\neq\varnothing$, then the graph $C_n+\overline{K}_t$ is harmonious.

Keywords graph, harmonious grpah, harmonious labeling