第15卷 增刊
1995年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 15 Supp
Nov. 1995

质环上的微商及环的结构*

张立石
(大连水产学院数学教研室，116023)

摘 要 本文证明如下定理：R 为质环，char$R\neq 2$，d 为 R 上非零微商，R 中无非零诣零元，$\forall x,y\in R$，$[(dx)^2,dy]-[dx,(dy)^2]\in Z$，则 R 为交换环，或 R 可嵌入体中.

关键词 诣零元，微商
分类号 AMS(1991) 16N60/CCL O153.3

在文[1]中，有如下定理：R 为质环，且有$\forall x,y\in R$，有$[x^2,y]-[x,y^2]\in Z$，则 R 为交换环. 本文中我们将元素限制在微商值上，得到摘要中的定理. 作为引入微商的一般性条件，我们将 R 限定为特征非 2 之质环上.

引理 1 R 为质环，I 为 R 之非零左(右)理想 d 为 R 上非零微商，$d(I)=0$，则 $d=0$.

证明 不妨设 I 为左理想，右理想时类似，$\forall x\in R$，$\forall y\in I$，$xy\in I$，则 $d(xy)=0$ 即

$$d(x)\cdot y+x\cdot d(y)=0,d(x)y=0,$$

由 x,y 任意性及 R 为质环知 $d=0$.

引理 2 R 为质环，$ab\in Z$，$0\neq a\in Z$，则 $b\in Z$.

证明 $\forall r\in R$，$abr=rab=a(rb)$，从而有 $a(br-rb)=0$，$\forall x\in R$，$ax(br-rb)=0$，R 为质环，故有 $br=rb$，即 $b\in Z$.

引理 3 R 为质环，且无非零诣零元，则 R 无零因子.

证明 如 $ab=0$，$\forall x\in R$，$(axb)^2=0$，因 R 无非零诣零元，从而 $axb=0$，R 为质环，则 $a=0$ 或 $b=0$.

引理 4 d 为环 R 上微商，L 为 R 之左(右)理想，则 $L+d(L)$为 R 之左(右)理想.

证明 设 L 为 R 之左理想，右理想时证明类似，$L+d(L)$显然为 R 之加法群，如 $i,j,p,q\in L$ 使 $i+d(j)\in L+d(L)$，$p+d(q)\in L+d(L)$，则有

$$(i+d(j))(p+d(q))=ip+id(q)+d(j)p+d(j)d(q),$$

而 $d(j)d(q)=d(d(j)\cdot q)-d^2(j)\cdot q\in L+d(L)$，又由于 $id(q)=d(iq)-d(i)q\in L+d(L)$，故 $L+d(L)$对乘法封闭，$\forall r\in R$，$r(i+d(j))=ri+rd(j)=ri+d(rj)-d(r)j\in L+d(L)$. 故 $L+d(L)$为 R 之左理想.

引理 5 R 为质环，d 为 R 上非零微商. 又$\forall x\in R$，$dx=0$ 或 dx 可逆，则 R 中每个左(右)理想为极大左(右)理想.

* 1993年2月16日收到.

证明 只须验证每个左理想皆为极大即可. 设 L_1 为 R 之左理想, L_2 为 R 之左理想且 $L_2 \supsetneq L_1$, 由引理 1 知 $d(L_1)\neq 0$, 故 $L_1+d(L_1)$ 中有可逆元, 从而 $L_1+d(L_1)=R$, 如 $x_0\in L_2$, 但 $x_0 \notin L_1$, $x_0=l_1+d(l_2)$, $l_1, l_2\in L_1$, 由于 $x_0\notin L_1$, 从而 $x_0-l_1=d(l_2)\neq 0$, 但 $x_0-l_1\in L_2$, 从而 L_2 中有逆元素, 进而 $L_2=R$. 此说明 L_1 为极大理想.

引理 6 R 为质环, $\mathrm{char}R\neq 2$, d 为 R 上非零微商, R 非交换环, 且 $\forall x, y\in R$, $[(dx)^2, dy]-[dx, (dy)^2]\in Z$ 则 $\forall y\in R$, $(dy)^2\in Z$.

证明 由 x, y 任意性, 用 $x+y$ 代替已知条件中 x 得

$$[(dx)^2+dx\cdot dy+dy\cdot dx+(dy)^2, dy]-[dx+dy, (dy)^2]\in Z.$$

整理上式得 $[(dx)^2, dy]+[dx, dy]dy+dy[dx, dy]-[dx, dy]dx-dx\cdot[dx, dy]=[(dy)^2, dx]\in Z$. 取 $a=(dy_0)^2$, 令 $\delta=I_a$, $\delta d(R)\subseteq Z$, 由文献[2]定理 4 有 $\delta=0$ 或 $d=0$, 或 R 为交换环. 依本引理之条件显然有 $(dy)^2\in Z$.

引理 7 d 为环 R 上微商, 则 $d(Z)\subseteq Z$.

证明 $\forall x, y\in R$, 由 $d[x, y]=[dx, y]+[x, dy]$ 立即可得此证明.

引理 8 在引理 6 条件下, 必有 $d(Z)=0$ 但 $Z\neq 0$.

证明 由引理 6 知, 若 $Z=0$, 则 $\forall x\in R$, $(dx)^2=0$, 则由文献[3]中定理, 得 $d=0$, 又如有 $d(Z)\neq 0$, 取 $a\in Z$ 使 $d(a)\neq 0$, 用 $a+x$ 代入 $(d(a+x))^2\in Z$, 有 $(da)^2+da\cdot dx+dx\cdot da+(da)^2\in Z$, 由引理 7, 2 及 $\mathrm{char}R\neq 2$, 知 $dx\in Z$, 用 $xd(y)$ 代替此处 x 有 $dx\cdot dy+x\cdot d^2(y)\in Z$, 由引理 7, $d^2(y)\in Z$, R 非交换从而 $\exists\ x_0\in R$, $x_0\notin Z$, 从而 $\forall y\in R$, $d^2(y)=0$, 由文献[4]引理 1. 1. 9, 得 $d=0$.

引理 9 环 R 无零因子, 又任意非零左(右)理想均为极大, 则 R 为体.

证明 $\forall a, b\in R-\{0\}$, a^2R, aR 均为 R 之右理想, 且 $a^2R\subseteq aR$, 由 a^2R 之极大性有 $a^2R=aR$, $a^2R=0$ 有 $a=0$, 从而 $a^2R\neq 0$, $\exists\ x\in R$ 使 $ab=a^2x$, $a(b-ax)=0$, $a\neq 0$, 有 $b=ax$, 同理 $\exists\ y\in R$ 使 $ya=b$, 故 R 为体.

定理 R 为质环, $\mathrm{char}R\neq 2$, d 为 R 上非零微商, $\forall x, y\in R$, $[(dx)^2, dy]-[dx, (dy)^2]\in Z$, 又 R 中无非零诣零元, R 非交换, 则 R 可以嵌入体中.

证明 由引理 8, 考虑 $d(Z)=0$, $Z\neq 0$ 情况即可, 令 $\Delta=\{r/z \mid r\in R, 0\neq z\in Z\}$, $Z\neq 0$, 故 $\Delta\neq\varnothing$, 在集合 Δ 上定义关系"$\sim$"如下: $\forall\ r_1/z_1, r_2/z_2\in\Delta$, $r_1/z_1\sim r_2/z_2\Leftrightarrow r_1z_2=r_2z_1$. 易验证"$\sim$"为 Δ 上一个等价关系. 令 $\Sigma=\Delta/\sim$, 不妨用 r/z 代表 r/z 之等价类, Σ 中定义"$+$", "$\cdot$"如下, $\forall\ r_1/z_1\in Z$, $r_2/z_2\in Z$,

$$r_1/z_1+r_2/z_2=r_1z_1+r_2z_1/z_1z_2,$$

$$r_1/z_1\cdot r_2/z_2=r_1r_2/z_1z_2.$$

不难验证"$+$", "$\cdot$"为 Σ 上加法, 乘法, 且 Σ 为一个结合质环. 当 R 为质环时, Σ 亦为质环, 且 $\mathrm{char}R\neq 2$ 时, $\mathrm{char}\Sigma\neq 2$. 定义 Σ 上映射如下: $D(r/z)=dr/z$, $\forall\ r_1/z_1\in\Sigma$, $r_2/z_2\in\Sigma$, 注意到 $d(Z)=0$, 则

$$\begin{aligned} D(r_1/z_1+r_2/z_2) &= D(r_1z_2+r_2z_1/z_1z_2)=d(r_1z_2+r_2z_1)/z_1z_2 \\ &= d(r_1)z_2/z_1z_2+d(r_2)z_1/z_2z_1=D(r_1/z_1)+D(r_2/z_2), \end{aligned}$$

而

$$D(r_1/z_1 \cdot r_2/z_2) = D(r_1r_2/z_1z_2) = d(r_1r_2)/z_1z_2 = d(r_1)r_2/z_1z_2 + r_1d(r_2)/z_1z_2$$
$$= D(r_1/z_1)r_2/z_2 + r_1/z_1D(r_2/z_2),$$

即 D 为 Σ 上微商，又 $d\neq 0$ 知 $D\neq 0$，且 R 交换当且仅当 Σ 交换，Σ 中无非零诣零元当且仅当 Σ 中无非零诣零元. 可验证其满足定理中条件

$$[(D(r_1/z_1))^2, D(r_2/z_2)] - [D(r_1/z_1), (D(r_2/z_2))^2] \in Z^*\ (\Sigma\text{ 的中心}),$$

则显然 Z^* 为域. 由引理 6，知$\forall\ r/z\in\Sigma$，$(D(r/z))^2\in Z^*$，$0\neq(D(r/z))^2$ 为可逆元如 $(D(r/z))^2=0$，则 $D(r/z)=0$（Σ 无零因子），如 $(D(r/z))^2$ 可逆，设逆元为 $a\in\Sigma$，$a(D(r/z))^2=(D(r/z))^2\cdot a=1$，$\forall\ t\in\Sigma$，$0=[a(D(r/z))^2,t]=(D(r/z))^2[a,t]$，由 $(D(r/z))^2\neq 0$ 知 $[a,t]=0$ 即 $a\in Z^*$，从而

$$D(r/z)\cdot aD(r/z) = aD(r/z)\cdot D(r/z) = 1,$$

即 $D(r/z)$ 可逆，故满足引理 5 条件，由引理 5 结论及引理 9 有 Σ 为体. 定义 $f:R\rightarrow\Sigma$，使 $f(r)=rq_0/q_0$. 其中 $0\neq q_0\in Z$，显然 f 为单同态，即 R 可嵌入体中.

参 考 文 献

[1] Gupta, Acta. Acad. Scient. Tomus, 36(3—6)(1980), 233—236.

[2] P. H. Lee, T. K. Lee, Bultetin of the Institute of Mathematics Acad Sinca, Vol. 11(1983), 75—80.

[3] A. Giambruno, I. N. Herstein, Rendi del circolo Mathematico Di palermo serie Ⅱ, Tomo XXX, (1981), 199—206.

[4] I. N. Herstein, *Rings with Involution*, University of Chicago Press, Chicago, 1976.

Derivations on Prime Rings

Zhang Lishi

(Dalian Fisheries College, 116023)

Abstract

In this paper, we prove the following theorem:

Theorem Let R be a prime ring, char$R\neq 2$, d be a non-zero derivation on R, there is no nilelement in R. If R is a non-communtative ring such that $\forall\ x,y\in R$, $[(dx)^2, ddy]-[dx,(dy)^2]\in Z$, then R can be embeded into a skew field.

Keywords centralizable matrix, eigenvalues of quaternion matrix.