第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

具有非退化Killing型的广义李超代数*

张佩华 张永正
(山东信息工程学校，潍坊 261041) (东北师范大学数学系，长春 130024)

摘 要 设 F 是特征数为零的域. 本文证明了 F 上的有限维广义李超代数的 Killing 型是相容的、不变的与上对称的. 进而证明了具有非退化 Killing 型的有限维广义李超代数的若干性质，最后得出这种广义李超代数必为有限个典型的广义李超代数的直积.

关键词 广义李超代数，Killing 型.
分类号 AMS(1991) 17B05/CCL O152.5

§1 $Pl(v)$ 的上迹

本文总设 F 为特征零的任意域，$M=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{2^s-1}\}$ 为整数环模 2^s 的剩余类环. 设 A 是 F 上的代数，若 A 可分解为它的子空间的直和 $A=\bigoplus_{\alpha\in M}A_\alpha$，并且 $A_\alpha A_\beta\subset A_{\alpha+\beta}$，$\forall\ \alpha,\beta\in M$，则称 A 为 F 上的广义超代数.

设 x 是广义超代数 $A=\bigoplus_{\alpha\in M}A_\alpha$ 的非零元素，若 $x\in A_\alpha$，$\alpha\in M$，则称 x 为具有次数 α 的齐次元素，记为 $\deg x=\alpha$. 若在一个表达式中出现了 $\deg x$，则我们已假定 x 是齐次元素，当 $\alpha=\bar{n}\in M$ 时，我们令 $(-1)^\alpha=(-1)^n$. 在本文中，广义超代数的子代数与理想均指的是阶化的子代数与理想.

设 $A=\bigoplus_{\alpha\in M}A_\alpha$ 是广义超代数，若对 $\forall\ a,b,c\in A$，均有 $(ab)c=a(bc)$，则称 A 是结合的.

设 $G=\bigoplus_{\alpha\in M}G_\alpha$ 是具有运算 $\langle,\rangle$ 的广义超代数，若 G 满足

$$\langle a,b\rangle=-(-1)^{(\deg a)(\deg b)}\langle b,a\rangle,$$

$$\langle a,\langle b,c\rangle\rangle=\langle\langle a,b\rangle,c\rangle+(-1)^{(\deg a)(\deg b)}\langle b,\langle a,c\rangle\rangle,$$

则称 G 是广义李超代数.

设 $A=\bigoplus_{\alpha\in M}A_\alpha$ 是结合的广义超代数，则如下的 $\langle,\rangle$ 运算

$$\langle a,b\rangle=ab-(-1)^{(\deg a)(\deg b)}ba \tag{1}$$

使 A 成为一个广义李超代数，记它为 A_G.

设 $V=\bigoplus_{\alpha\in M}V_\alpha$ 是 M-阶化空间，则 $\mathrm{End}(V)$ 自然地被赋于一个 M-阶化而变为一个结合的广义的超代数，于是 $(\mathrm{End}(V))_G$ 是广义李超代数，记它为 $\mathrm{pl}(V)$. 则 $\mathrm{pl}(V)=\bigoplus_{\alpha\in M}\mathrm{pl}_\alpha(V)$，其中

$$\mathrm{pl}_\alpha(V)=\{a\in\mathrm{pl}(V)\,|\,a(V_\beta)\subset V_{\alpha+\beta},\forall\ \beta\in M\}.$$

* 1993年7月13日收到.

以下设 M-阶化空间 $V=\bigoplus_{\alpha\in M}V_\alpha$ 是有限维的，设 $\dim V_{\bar i}=m_i$，$i=0,1,\cdots,2^s-1$. 令 $n_{-1}=0$，$n_i=\sum_{j=0}^{i}m_j$，$i=0,1,\cdots,2^s-1$. 设 $e_1,\cdots,e_{n_0},e_{n_0+1},\cdots,e_{n_1},\cdots,e_{n_{2^s-2}+1},\cdots,e_{n_{2^s-1}}$ 是 V 的基底，它使得 $e_{n_{i-1}+1},\cdots,e_{n_i}$ 是 $V_{\bar i}$ 的基底，$i=0,1,\cdots,2^s-1$. 我们称 V 的这个基为 V 的齐次基底. 设 $a\in \mathrm{pl}(V)$，则 a 在齐次基底上的阵是分块阵 $(\alpha_{ij})_{0\leqslant i,j\leqslant 2^s-1}$，其中 α_{ij} 是 $m_i\times m_j$ 矩阵. 从而，在取定齐次基底之后，我们可将 $\mathrm{pl}(V)$ 的元素写为矩阵 (α_{ij}) 的形式.

设 $0\leqslant r\leqslant 2^s-1$，$(\alpha_{ij})\in \mathrm{pl}(V)$，$0=\leqslant i,j\leqslant 2^s-1$，易知

$$(\alpha_{ij})\in \mathrm{pl}_{\bar r}(V)\Leftrightarrow \text{当}\ \overline{i-j}\neq \bar r\ \text{时},\quad \alpha_{ij}=0. \tag{$*$}$$

定义 1 设 $a=(\alpha_{ij})\in \mathrm{pl}(V)$，称 $\mathrm{str}(a):=\sum_{i=0}^{2^s-1}(-1)^i T_r(\alpha_{ii})$ 为 a 的上迹.

易知，a 的上迹不依赖于 V 的齐次基底的选择.

定义 2 设 $G=\bigoplus_{\alpha\in M}G_\alpha$ 是 M-阶化空间，f 是 G 上的双线性型，若 $f(G_\alpha,G_\beta)=0$，其中 $\alpha+\beta\neq\bar 0$，则称 f 相容的；若 $f(a,b)=(-1)^{(\deg a)(\deg b)}f(b,a)$，其中 a,b 是 G 中任两个齐次元素，则称 f 是上对称的；当 G 是广义李超代数时，若 $f(\langle a,b\rangle,c)=f(a,\langle b,c\rangle)$，$\forall\ a,b,c\in G$，则称 f 是不变的.

定理 1 (i) $\mathrm{pl}(V)$ 上的双线性型 $f_s(a,b):=\mathrm{str}(ab)$ 是相容的和上对称的.

(ii) $\mathrm{str}(\langle a,b\rangle)=0$，$\forall\ a,b\in \mathrm{pl}(V)$.

(iii) f_s 是不变的.

证明 (i) 设 $a\in \mathrm{pl}_\alpha(V)$，$b\in \mathrm{pl}_\beta(V)$，$\alpha+\beta\neq 0$，则 $ab\in \mathrm{pl}_{\alpha+\beta}(V)$. 取定 V 的齐次基底后，可设 $ab=(\alpha_{ij})$，由 $\alpha+\beta\neq\bar 0$ 及 $(*)$ 式可知 $\alpha_{ii}=0$，$i=0,1,\cdots,2^s-1$. 故 $f_s(a,b)=0$，因此 f_s 是相容的.

设 $a\in \mathrm{pl}_\alpha(V)$，$b\in \mathrm{pl}_\beta(V)$. 若 $\alpha+\beta\neq\bar 0$，由 $(*)$ 式知，$\mathrm{str}(ab)=0=\mathrm{str}(ba)$，故 $f_s(a,b)=(-1)^{(\deg a)(\deg b)}f_s(b,a)=0$.

若 $\alpha+\beta=\bar 0$. 设 $a=(\alpha_{ij})$，$b=(\beta_{ij})$，$0\leqslant i,j\leqslant 2^s-1$. 如果 $\alpha=\bar 0$，则 $\beta=\bar 0$. 由 $(*)$ 式知，a 与 b 分别是准对角形阵 $\mathrm{diag}[\alpha_{00},\alpha_{11},\cdots,\alpha_{2^s-1,2^s-1}]$ 与 $\mathrm{diag}[\beta_{00},\beta_{11},\cdots,\beta_{2^s-1,2^s-1}]$. 故

$$f_s(a,b)=\sum_{i=0}^{2^s-1}(-1)^i T_r(\alpha_{ii}\beta_{ii})=\sum_{i=0}^{2^s-1}(-1)^i T_r(\beta_{ii}\alpha_{ii})=f_s(b,a)=(-1)^{(\deg a)(\deg b)}f_s(b,a).$$

如果 $\alpha=\bar k$，其中 $1\leqslant k\leqslant 2^s-1$，则 $\beta=\overline{2^s-k}$，并且 $1\leqslant 2^s-k\leqslant 2^s-1$. 因 $a\in \mathrm{pl}_{\bar k}(V)$，由 $(*)$ 式知，

$$a=\begin{bmatrix}0 & B\\ C & 0\end{bmatrix},$$

其中 B 是准对角形阵 $\mathrm{diag}[\alpha_{0,2^s-k},\alpha_{1,2^s-k+1},\cdots,\alpha_{k-1,2^s-1}]$，$c$ 是准对角形阵 $\mathrm{diag}[\alpha_{k,0},\alpha_{k+1,1},\cdots,\alpha_{2^s-1,2^s-1-k}]$. 同理，由 $b\in \mathrm{pl}_{\overline{2^s-k}}(V)$ 及 $(*)$ 式知，

$$b=\begin{bmatrix}0 & E\\ H & 0\end{bmatrix},$$

其中 $E=\mathrm{diag}[\beta_{0k},\beta_{1,k+1},\cdots,\beta_{2^s-1-k,2^s-1}]$，$H=\mathrm{diag}[\beta_{2^s-k,0},\beta_{2^s-k+1},1,\cdots,\beta_{2^s-1,k-1}]$. 于是

$$f_s(a,b) = \mathrm{str}(ab) = \mathrm{str}\left(\begin{bmatrix} BH & 0 \\ 0 & CE \end{bmatrix}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i T_r(\alpha_{i,2^s-k+i}\beta_{2^s-k+i,i}) \sum_{i=0}^{2^s-1-k}(-1)^{k+i} T_r(\alpha_{k+i,i}\beta_{i,k+i}),$$

$$(-1)^{(\deg a)(\deg b)} f_s(b,a) = (-1)^{k(2^s-k)}\mathrm{str}(ba)$$

$$= (-1)^k \mathrm{str}\left(\begin{bmatrix} EC & 0 \\ 0 & HB \end{bmatrix}\right) = (-1)^k\Big(\sum_{i=0}^{2^s-1-k}(-1)^i T_r(\beta_{i,k+i}\alpha_{k+i,i})$$

$$+ \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{2^s-k+i} T_r(\beta_{2^s-k+i,i}\alpha_{i,2^s-k+i})\Big).$$

从而可推得，$f_s(a,b)=(-1)^{(\deg a)(\deg b)} f_s(b,a)$，综上知，$f_s$ 是上对称的.

(ii) 只须证 a 与 b 均为齐次元素的情形. 因 f_s 是上对称的，故

$$\mathrm{str}(\langle a,b\rangle) = \mathrm{str}(ab) - (-1)^{(\deg a)(\deg b)}\mathrm{str}(ba)$$
$$= f_s(a,b) - (-1)^{(\deg a)(\deg b)} f_s(b,a) = 0.$$

(iii) 需证等式 $f_s(\langle a,b\rangle,c)=f_s(a,\langle b,c\rangle)$，$\forall\, a,b,c\in \mathrm{pl}(V)$. 只须证 a 与 b 均为齐次元素的情形. 由(ii)知，$\mathrm{str}(\langle b,ac\rangle)=0$. 利用(1)式直接验证可知，

$$\langle b,ac\rangle = \langle b,a\rangle c + (-1)^{(\deg a)(\deg b)} a\langle b,c\rangle,$$

由此即可推得所要证明的等式.

§2 Killing 型

设 $G=\bigoplus_{\alpha\in M} G_\alpha$ 是广义李超代数，本节总设 G 是有限维的. 设 $D\in \mathrm{pl}_\alpha(G)$，若 $D(\langle a,b\rangle)=\langle D(a),b\rangle+(-1)^{\alpha(\deg a)}\langle a,D(b)\rangle$，则称 D 是 G 的次数为 α 的齐次导子. 用 $\mathrm{Der}_\alpha G$ 表示所有的次数为 α 的齐次导子构成的空间，则 $\mathrm{Der}G:=\bigoplus_{\alpha\in M}\mathrm{Der}_\alpha G$ 是 $\mathrm{pl}(G)$的子代数，称 $\mathrm{Der}G$ 为 G 的导子代数且称 $\mathrm{Der}G$ 的元素为 G 的导子. 设 $x\in G$，则 $ad\,x: a\to\langle x,a\rangle$，$\forall\, a\in G$，是 G 的导子，称 $ad\,x$ 为内导子. 若 x 是 G 的齐次元素，则 $ad\,x$ 是 G 的齐次导子，并且 $ad\,x$ 的次数等于 x 的次数. 还可验证，对$\forall\, x,y\in G$，$\forall\, D\in \mathrm{Der}G$，则 $ad(\langle x,y\rangle)=\langle ad\,x,ad\,y\rangle$，$\langle D,ad\,x\rangle=ad(D(x))$.

称双线性型

$$\chi(a,b) = \mathrm{str}((ad\,a)(ad\,b)),\quad \forall\, a,b\in G$$

为广义李超代数 G 的 Killing 型. 由定理 1，有

命题 1 广义李超代数的 Killing 型是相容的、上对称的和不变的.

命题 2 设广义李超代数 $G=\bigoplus_{\alpha\in M} G_\alpha$ 的 Killing 型 χ 是非退化的. 若 $2\alpha=\bar{0}$，则 χ 在 G_α 上的限制是非退化的；若 $2\alpha\neq\bar{0}$，则 χ 在 G_α 上的限制是零.

证明 设 $2\alpha=\bar{0}$ 且 $a_\alpha\in G_\alpha$. 若对$\forall\, b_\alpha\in G_\alpha$，均有 $\chi(a_\alpha,b_\alpha)=0$. 设 $c=\sum_{\beta\in M} c_\beta$ 是 G 的任一元素，因 χ 是相容的，故 $\chi(a_\alpha,c_\beta)=0$，其中 $\beta\neq-\alpha$. 由 $2\alpha=\bar{0}$ 知 $c_{-\alpha}\in G_\alpha$，故 $\chi(a_\alpha,c_{-\alpha})=0$. 从而，$\chi(a_\alpha,c)=0$. 因 χ 非退化，故 $a_\alpha=0$. 因此 χ 在 G_α 上的限制是非退化的. 由 χ 的相容性知，当 $2\alpha\neq\bar{0}$时，

χ 在 G_α 上的限制是零.

定理 2 若广义李超代数 $G=\bigoplus_{\alpha\in M}G_\alpha$ 的 Killing 型是非退化的,则 G 的每个导子均是内导子.

证明 设 D 是 G 的任一导子.令

$$f:\quad G\to F$$
$$x\to \mathrm{str}(D(adx)),$$

则 $f\in G^*$.因 χ 是非退化的,故存在 $e\in G$,使得 $f(x)=\chi(e,x)$,$\forall\ x\in G$.所以

$$\chi(e,x)=\mathrm{str}(D(adx)),\forall\ x\in G.$$

令 $E=ade-D$,则 E 是 G 的导子,并且

$$\mathrm{str}(E(adx))=\chi(e,x)-\mathrm{str}(D(adx))=0,$$

所以 $\mathrm{str}(E(adx))=0$, $\forall\ x\in G$.

设 $E=\bigoplus_{\alpha\in M}E_\alpha$,其中 E_α 是次数为 α 的齐次导子.设 y,z 是 G 的任意齐次元素,则

$$\begin{aligned}\chi(E_\alpha(y),z)&=\mathrm{str}(ad\,E_\alpha(y)\cdot adz)=\mathrm{str}(\langle E_\alpha,ady\rangle adz)\\&=\mathrm{str}(E_\alpha(ady)(adz)-(-1)^{\alpha(\deg y)}(ady)E_\alpha(adz))\\&=\mathrm{str}(E_\alpha(ady)(adz)-(-1)^{\alpha(\deg y)}(-1)^{\deg y(\alpha+\deg z)}E_\alpha(adz)(ady))\\&=\mathrm{str}(E_\alpha((ady)(adz)-(-1)^{(\deg y)(\deg z)}(adz)(ady)))=\mathrm{str}(E_\alpha\cdot ad\langle y,z\rangle).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\chi(E(y),z)&=\chi(\sum_{\alpha\in M}E_\alpha(y),z)=\sum_{\alpha\in M}\chi(E_\alpha(y),z)\\&=\sum_{\alpha\in M}(E_\alpha\cdot ad\langle y,z\rangle)=\mathrm{str}(\sum_{\alpha\in M}E_\alpha\cdot ad\langle y,z\rangle)=\mathrm{str}(E\cdot ad\langle y,z\rangle)=0.\end{aligned}$$

从而,对$\forall\ a,b\in G$,均有 $\chi(E(a),b)=0$.因 χ 是非退化的,故 $E=0$,所以 $D=ade$ 是内导子.

定理 3 设 $G=\bigoplus_{\alpha\in M}G_\alpha$ 是广义李超代数,若 G 的 Killing 型是非退化的,则 G 不包含可解的非零阶化理想.

证明 假设 G 包含可解的非零阶化理想 J.易知,存在非负整数 n,使得 $J^{(n)}=(adJ)^n(J)$ 是 G 的非零的阶化 Abel 理想.设 $I=J^{(n)}$.则 $I=\bigoplus_{\beta\in M}I_\beta$,其中 $I_\beta=I\cap G_\beta$.任取 $x\in G,y\in I$.设 $x=\sum_{\alpha\in M}x_\alpha,y=\sum_{\beta\in M}y_\beta$.则 $adx_\alpha ady_\beta\in pl_{\alpha+\beta}(G)$.设 $adx_\alpha ady_\beta$ 在 G 的齐次基上的分块阵是(α_{ij}).若 $\alpha+\beta\neq\bar{0}$,由(*)式知,$\alpha_{ii}=0,i=0,1,\cdots,2^s-1$.因此 $\mathrm{str}(adx_\alpha adx_\beta)=0$;若 $\alpha+\beta=\bar{0}$,由(*)式,$adx_\alpha ady_\beta$ 的阵是准对角形阵 $A=\mathrm{diag}[\alpha_{00},\alpha_{11},\cdots,\alpha_{2^s-1,2^s-1}]$.因 $y_\beta\in I$,故 $adx_\alpha ady_\beta(G)\subset I$.因 I 是 Abel 的,故$(adx_\alpha ady_\beta)^2(G)\subset adx_\alpha ady_\beta(I)=0$.从而 $A^2=0$,于是 $\alpha_{ii}^2=0,i=0,1,\cdots,2^s-1$,则 $T_r(\alpha_{ii})=0$.因此 $\mathrm{str}(adx_\alpha ady_\beta)=0$.故 $\chi(x,y)=\mathrm{str}(adxady)=\mathrm{str}((\sum_{\alpha\in M}adx_\alpha)(\sum_{\beta\in M}ady_\beta))=\sum_{\alpha,\beta\in M}\mathrm{str}(adx_\alpha ady_\beta)=0$.所以 $\chi(G,I)=0$.此与 χ 的非退化性矛盾.

引理 1 设 $J=\bigoplus_{\alpha\in M}J_\alpha$ 是广义李超代数 G 的阶化理想,f 是 G 上的双线性型,若 f 是不变的与相容的,则 $J^\perp=\{x\in G\,|\,f(x,J)=0\}$是 G 的阶化理想.

证明 因 f 是不变的,故对$\forall\ x\in J^\perp$,则有 $f(\langle x,G\rangle,J)=f(x,\langle G,J\rangle)=0$,于是可知 $J^\perp$

是 G 的理想.

任取 $x\in J^{\perp}$,设 $x=\sum\limits_{\alpha\in M}x_\alpha$,其中 $x_\alpha\in G_\alpha$.下面证明 $x_\alpha\in J^{\perp}$.

假设 $x_\alpha\notin J^{\perp}$.即 $f(x_\alpha,J)\neq 0$.任取 $y_{-\alpha}\in J_{-\alpha}$,设 $f(x_\alpha,y_{-\alpha})=\lambda$.令 $h=x-x_\alpha$,则 $h=\sum\limits_{\beta\in M\setminus\{-\alpha\}}x_\beta$.因 f 是相容的,故 $f(h,J_{-\alpha})=0$.若对任意 $z\in\bigoplus\limits_{\beta\in M\setminus\{-\alpha\}}J_\beta$,均有 $f(h,z)=0$,则 $f(h,J)=0$.因 $f(x,J)=0$,所以 $f(x_\alpha,J)=0$,故 $x_\alpha\in J^{\perp}$,此与假设矛盾.因此存在 $k\in\bigoplus\limits_{\beta\in M\setminus\{-\alpha\}}J_\beta$,使得 $f(h,k)\neq 0$.取 $a\in F$ 并且 $a\neq-\dfrac{\lambda}{f(h,k)}$.因 f 是相容的,故 $f(x,y_{-\alpha}+ak)=f(x_\alpha+h,y_{-\alpha}+ak)=f(x_\alpha,y_{-\alpha})+af(h,k)\neq 0$.此与 $f(x,J)=0$ 矛盾.故 $x_\alpha\in J^{\perp}$,$\forall\ \alpha\in M$.从而 $J^{\perp}$是阶化的.

若广义李超代数 G 除了本身与 0 之外,不包含其它的阶化理想,并且 $\langle G,G\rangle\neq 0$,则称 G 是单的.

定理 4 若广义李超代数 $G=\bigoplus\limits_{\alpha\in M}G_\alpha$ 的 Killing 型是非退化的,则存在 G 的阶化理想 $I_1,I_2,\cdots,I_t$,使得 $G=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_t$,并且 $I_1,\cdots,I_t$ 均是单的广义李超代数,它们关于 Killing 型是两两正交的.

证明 设 I_1 是 G 的一个极小的非零阶化理想,由命题 1 与引理 1 知,$I_1^{\perp}=\{x\in G\mid\chi(x,I_1)=0\}$是 G 的阶化理想,故 $I_1^{\perp}\cap I_1=0$ 或 I_1.若 $I_1^{\perp}\cap I_1=I_1$,则 $I_1\subset I_1^{\perp}$,于是 $\chi(G\langle I_1,I_1\rangle)=\chi(\langle G,I_1\rangle,I_1)\subset\chi(I_1,I_1)\subset\chi(I_1^{\perp},I_1)=0$.因 χ 是非退化的,故$\langle I_1,I_1\rangle=0$,从而 G 包含可解的非零阶化理想,此与定理 3 矛盾.故 $I_1^{\perp}\cap I_1=0$.考察维数知 $G=I_1\oplus I_1^{\perp}$.

因$\langle I_1,I_1^{\perp}\rangle\subset I_1^{\perp}\cap I_1=0$,从而 I_1 或 $I_1^{\perp}$ 的阶化理想也是 G 的阶化理想.由 I_1 的极小性知,I_1 是单的广义李超代数.易知,χ 在 $I_1^{\perp}$ 上的限制是非退化的.对 $I^{\perp}$继续如上步骤,因 $\dim G$ 是有限的,所以可得到 G 的理想 $I_1,I_2,\cdots,I_t$,使得 $G=I_1\oplus I_2\oplus\cdots\oplus I_t$,并且 $I_1,\cdots,I_t$ 满足定理的所有条件.

设 G 是广义李超代数,对以下三个条件,

(1) G 具有非退化 Killing 型.

(2) G 是有限个单的广义李超代数的直积.

(3) G 不包含可解的非零的阶化理想.

从每一个可推得下一个,但它们又是互不等价的,因为我们知道(见[1]或[2]),存在李超代数,它满足条件(2),但不满足条件(1);或者满足条件(3),但不满足条件(2).但是,这些条件对李代数是等价的.

设 $G=\bigoplus\limits_{\alpha\in M}G_\alpha$ 是广义李超代数.设 $N=\{\bar{0},\bar{2},\cdots,\overline{2^s-2}\}$,$H=\{\bar{1},\bar{3},\cdots,\overline{2^s-2}\}$.令 $G_{\bar{0}}=\bigoplus\limits_{\alpha\in N}G_\alpha$,$G_{\bar{1}}=\bigoplus\limits_{\alpha\in H}G_\alpha$.则 $G=G_{\bar{0}}\oplus G_{\bar{1}}$是李超代数.称它为由 $G=\bigoplus\limits_{\alpha\in M}G_\alpha$ 诱导的李超代数.

定义 3 若 $G=\bigoplus\limits_{\alpha\in M}G_\alpha$ 所诱导的李超代数是典型的,则称广义李超代数 G 是典型的.

若李超代数 $G=G_{\bar{0}}\oplus G_{\bar{1}}$是典型的,则它不包含非平凡的 Z_2-阶化理想,从而 $G=\bigoplus\limits_{\alpha\in M}G_\alpha$ 不包含非平凡的 M-阶化理想,故典型的广义李超代数是单的.

由本文的定理 4 与[2]的第 I 章 § 3 定理 1 的推论,可得到

定理 5 设 G 是广义李超代数,若 G 的 Killing 型是非退化的,则 G 是有限个典型的广义

李超代数的直积.

定理 5 将具有非退化 Killing 型的广义李超代数的分类问题归结为典型的广义李超代数的分类.

参 考 文 献

[1] V.G.Kac, *Lie Superalgebras*, Advances in Mathematics, 26(1977), 8—96.

[2] M.Scheunert, *The Theory of Lie Superalgebras*, Lecture Notes in Mathematics 716 Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1979.

[3] Wang Yuandong and Zhang Yongzheng, *Generalized Lie Superalgebras of Cartan Type*, to appear.

[4] J.E.Humpherys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, New York Inc, 1972.

Generalized Lie Superalgebras with Nondegenerate Killing Forms

Zhang Peihua

(Shandong Information Engineering School, Weifang 261041)

Zhang Yongzheng

(Northeast Normal University, Changchun 130024)

Abstract

Let F be a field of characteristic zero. It is proved that the killing form of finite dimensional generalized Lie superalgebras over F is consistent, invariant and supersymmetric. The properties of generalized Lie superalgebras with nondegenerate killing forms are also discussed.

Keywords generalized Lie superalgebras, killing forms.