第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

实正定矩阵的复合矩阵的正定性*

蒋 忠 樟

(浙江金华教育学院, 321000)

摘 要 本文讨论了实正定矩阵的复合矩阵的正定性,并且给出了实正定矩阵的复合矩阵仍为正定矩阵的一个充要条件.

关键词 实正定矩阵,复合矩阵.

分类号 AMS(1991) 15A48/CCL O151.21

设 T 是 n 阶实正定对称矩阵. 那么, T 的 $k(1\leqslant k\leqslant n)$ 级复合矩阵 $C_k(T)$ 仍是正定对称矩阵[1]. 但当 T 是一般的实正定矩阵($T\in R^{n\times n}$, 对任意的 $X'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$, 且 $X\neq 0$, $X'TX>0$) 时, $C_k(T)$ 却不一定仍是正定矩阵. 如正定矩阵

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&3&0\\0&-1&2&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$$

的 2 级复合矩阵

$$C_2(T)=\begin{pmatrix}1&3&0&0&-1&-3\\-1&2&0&0&1&-2\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&5&0&0\\1&3&0&0&1&3\\-1&2&0&0&-1&2\end{pmatrix}$$

非正定. 因为取 $X'=(1,-1,0,0,1,1)$ 有 $X'C_2(T)X=-2<0$.

那么,实正定矩阵在什么情况下其复合矩阵仍然是正定的.

文[2]给出了

定理 1 n 阶实方阵 T 正定的充要条件是,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P'TP=\mathrm{diag}(E_1,E_2,\cdots,E_s,1,\cdots,1),\tag{1}$$

其中 $E_i=\begin{pmatrix}1&a_i\\-a_i&1\end{pmatrix}(i=1,2,\cdots,s)$, $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_s>0$, $s\leqslant[\frac{n}{2}]$, P' 是 P 的转置.

称(1)为正定矩阵 T 在合同下的标准形,简称为标准形.

引理 1 合同实方阵有相同的正定性.

* 1992年11月30日收到.

根据复合矩阵的同态性质[1]得

引理 2 $C'_k(P'TP)=C'_k(P)C_k(T)C_k(P)$.

于是得

定理 2 正定矩阵 T 的复合矩阵 $C_k(T)$的正定性与 T 的标准形的复合矩阵的正定性相同.

这样,只需对正定矩阵的标准形的复合矩阵的正定性进行讨论.为讨论方便,将 T 的标准形分为下面两类

$$\text{当 } n = 2m \text{ 时}, u_{2m} = \mathrm{diag}(E_1,E_2,\cdots,E_m), \tag{2}$$

$$\text{当 } n = 2m+1 \text{ 时}, v_{2m+1} = \mathrm{diag}(E_1,E_2,\cdots,E_m,1), \tag{3}$$

其中 $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_m \geqslant 0$. 它们的复合矩阵共有四种,即 $C_{2k+1}(u_{2m})$、$C_{2k}(u_{2m})$、$C_{2k+1}(v_{2m+1})$、$C_{2k}(v_{2m+1})$. 下面只给出(另两种相仿).

定理 3 标准形(2)的复合矩阵是($1\leqslant k\leqslant m-1$)

1. 记

$$A_1^{(1)} = E_m,\quad A_1^{(i)} = \mathrm{diag}(E_{m-i+1},A_1^{(i-1)}),$$

$$\overline{A}_1^{(1)} = \det E_m,\quad \overline{A}_1^{(i)} = \mathrm{diag}(\det E_{m-i+1},E_{m-i+1}\times A_1^{(i-1)},\overline{A}_1^{(i-1)}),$$

$$A_j^{(1)} = \mathrm{diag}((\det E_{m-j+1})A_{j-1}^{(1)},E_{m-j+1}\times \overline{A}_{j-1}^{(1)}),\quad \overline{A}_j^{(1)} = (\det E_{m-j+1})\overline{A}_{j-1}^{(1)},$$

$$A_j^{(i)} = \mathrm{diag}((\det E_{m-i-j+2})A_{j-1}^{(i)},E_{m-i-j+2}\times \overline{A}_{j-1}^{(i)},A_j^{(i-1)})$$

$$\overline{A}_j^{(i)} = \mathrm{diag}((\det E_{m-i-j+2})\overline{A}_{j-1}^{(i)},E_{m-i-j+2}\times A_j^{(i-1)},\overline{A}_j^{(i-1)}),$$

其中 $2\leqslant i\leqslant m-k$, $2\leqslant j\leqslant k$, “$\times$”是矩阵的 Kronecker 积. 则

$$C_{2k+1}(u_{2m}) = \mathrm{diag}((\det E_1)A_k^{(m-k)},E_1\times \overline{A}_k^{(m-k)},\cdots,(\det E_{m-k})A_k^{(1)},E_{m-k}\times \overline{A}_k^{(1)}); \tag{4}$$

2. 记

$$B_1^{(1)} = B_1^{(i)} = \overline{B}_1^{(1)} = 1,\quad \overline{B}_1^{(s)} = \mathrm{diag}(E_{m-s+1},\overline{B}_1^{(s-1)}),$$

$$B_j^{(1)} = (\det E_{m-j+2})B_{j-1}^{(1)},\quad \overline{B}_j^{(1)} = \mathrm{diag}((\det E_{m-j+1})\overline{B}_{j-1}^{(1)},E_{m-j+1}\times B_j^{(1)}),$$

$$B_j^{(i)} = \mathrm{diag}((\det E_{m-i-j+3})B_{j-1}^{(i)},E_{m-i-j+3}\times \overline{B}_{j-1}^{(i-1)},B_j^{(i-1)}),$$

$$\overline{B}_j^{(s)} = \mathrm{diag}((\det E_{m-s-j+2})\overline{B}_{j-1}^{(s)},E_{m-s-j+2}\times B_j^{(s)},\overline{B}_j^{(s-1)}),$$

其中 $2\leqslant i\leqslant m-k+1$, $2\leqslant s\leqslant m-k$, $2\leqslant j\leqslant k$, 则

$$C_{2k}(u_{2m}) = \mathrm{diag}((\det E_1)B_k^{(m-k+1)},E_1\times\overline{B}_k^{(m-k)},(\det E_2)B_k^{(m-k)},E_2\times\overline{B}_k^{(m-k-1)}),$$

$$\cdots,E_{m-k}\times\overline{B}_k^{(1)},(\det E_{m-k+1})B_k^{(1)}). \tag{5}$$

证明 容易直接验证命题对 u_4 是正确的,假设命题对小于 $m(>2)$的任意自然数都成立,设 k 是小于 m 的任意自然数,u_{2m}的 $2k+1$ 级复合矩阵设为

$$(A_{ij})_{(m-k)\times(m-k)} \tag{$*$}$$

($*$)的第一行(列)是含 u_{2m} 的第一行(列)或第二行(列)的元素的 $2k+1$ 阶子式得到的 $C_{2k+1}(u_{2m})$ 的所有元素;第二行(列))是不含 u_{2m} 的第一、二行(列))的任何元素,但含 u_{2m} 的第三行(列)或第四行(列)的元素的 $2k+1$ 阶子式得到的 $C_{2k+1}(u_{2m})$ 的所有元素;依此确定($*$)的各行(列)元素. 由 u_{2m} 的元素特征可知 $A_{ij}=0(i\neq j)$,而

$$A_{ii}=\begin{pmatrix}(\det E_i)A_i & C_i\\ D_i & E_i\times\overline{A}_i\end{pmatrix}$$

中 $C_i=D_i=0$(作为 C_i,D_i 元素的 $2k+1$ 阶子式至少有两行(列)成比例).若记

$$\overline{u}_{2(m-i)}=\mathrm{diag}(E_{i+1},\cdots,E_m),$$

则 A_i 是 $\overline{u}_{2(m-i)}$ 的 $2(k-i)+1$ 级复合矩阵,$\overline{A}_i$ 是 $\overline{u}_{2(m-i)}$ 的 $2(k-i)$ 级复合矩阵,由归纳假设,A_i 适合(4),$\overline{A}_i$ 适合(5),即 $A_i=A_{k-1}^{(m-i-k+1)}$,$\overline{A}_i=\overline{A}_{k-1}^{(m-i-k+1)}(i=1,2,\cdots,m-k)$.于是(*)为(4).同理证明(5).

定理 4 正定矩阵 T 的标准形(2)的复合矩阵 $C_{2k+1}(u_{2m})$ 正定的充分必要条件是

$$E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times E_{j_4}\times E_{j_5},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times\cdots\times E_{j_t}$$

均正定,其中 $E_{j_1},E_{j_2},\cdots,E_{j_t}$ 取自 $E_1,E_2,\cdots,E_m$,$j_1<j_2<j_3<\cdots<j_t$,$t=2k+1\leqslant\begin{cases}m-1 & m\text{ 为偶数}\\ m & m\text{ 为奇数}\end{cases}$.

在定理证明之前,先给出

引理 3 A 是实正定矩阵,$k\in R$,$k>0$,则 kA 和 $A\times k$ 仍为实正定矩阵.

引理 4 $A\times(kB)=k(A\times B)$

引理 5 实矩阵 $\mathrm{diag}(T_1,T_2,\cdots,T_l)$ 正定的充要条件是 $T_i(i=1,2,\cdots,l)$ 正定.

引理 6 记 $E=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}(a\geqslant 0)$,则 $E\times\mathrm{diag}(T_1,T_2,\cdots,T_l)$ 合同于 $\mathrm{diag}(E\times T_1,E\times T_2,\cdots,E\times T_l)$.

引理 7 若 A 与 B 合同.那么,$E\times A$ 与 $E\times B$ 合同.

为下文方便

定义 设 $A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_l)$ 的正定性完全由 $\widetilde{A}=\mathrm{diag}(B_1,B_2,\cdots,B_s)$ 的正定性决定,则称 $\widetilde{A}$ 为 A 的正定决定型矩阵.

引理 8 若 $\widetilde{A}$ 为 A 的正定决定型矩阵.则存在可逆阵 P.使 $P'AP=\mathrm{diag}(B,\widetilde{A})$,$B$ 为正定矩阵.

引理 9 (4)中矩阵 $A_k^{(i)}$ 的正定决定型矩阵是以取自 $E_{m-i-k+2},E_{m-i-k+3},\cdots,E_m$ 的 Kronecker 积 $E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times E_{j_4}\times E_{j_5},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_t}$ 为对角块作成的矩阵,简记为

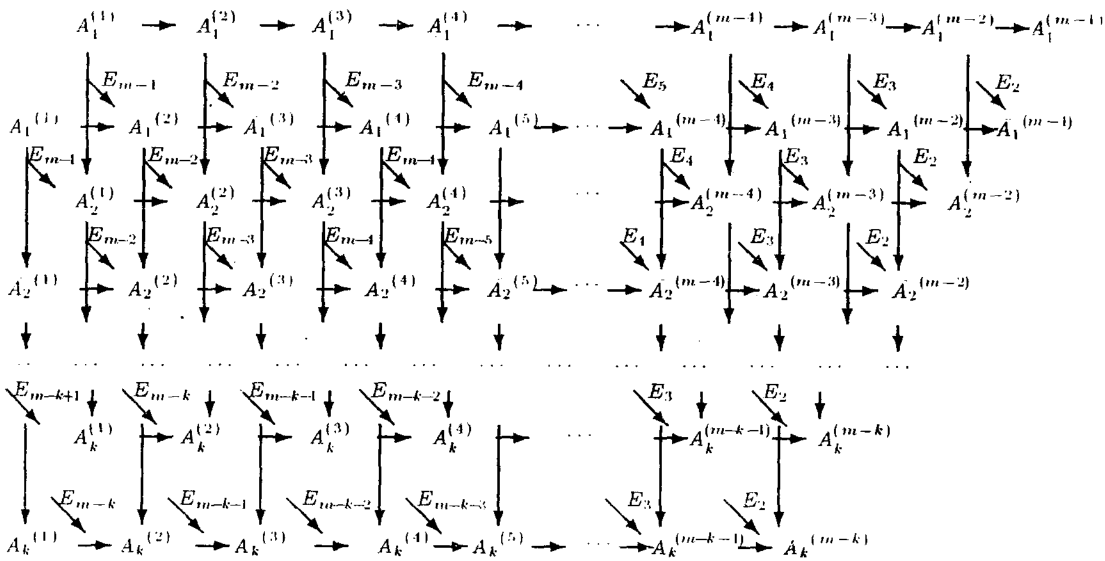
$$\widetilde{A}_k^{(i)}=\mathrm{diag}(E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_t}),$$

而 $\overline{A}_k^{(i)}$ 的正定决定型矩阵是以 $E_{j_1}\times E_{j_2},E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times E_{j_4},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_s}$ 为对角块作成的矩阵,简记为

$$\overline{A}_k^{(i)}=\mathrm{diag}(E_{j_1}\times E_{j_2},E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times E_{j_4},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_s}),$$

其中 $j_1<j_2<\cdots<j_t$,$t=2k-1\leqslant m-1$;$j_1<j_2<\cdots<j_s$,当 m 为偶数时,$s=2k\leqslant m-2$,当 m 为奇数时,$s=2k\leqslant m-1$.

(4)的构成矩阵的递推关系用下表反映



表中"$A \to B$"、"$\overset{A}{\searrow_E}\underset{B}{}$"、"$\overset{A}{\underset{B}{\downarrow}}$"分别表示 $B=\mathrm{diag}(*,A)$、$B=\mathrm{diag}(*,E\times A,*)$和 $B=\mathrm{diag}((\det E)A,*)$,如

$$\begin{tikzcd}
 & & A_1^{(4)} \arrow[d] \\
 & A^{(3)} \arrow[dr, "E_{m-4}"] & \\
A^{(3)} \arrow[rr] & & A_2^{(4)}
\end{tikzcd}$$

表示 $\overline{A}_2^{(4)}=\mathrm{diag}((\det E_{m-4})\overline{A}_1^{(4)},E_{m-4}\times A_2^{(3)},\overline{A}_2^{(3)})$.

该表不仅可以用来求(4),还可以清楚地看出各矩阵的构成元素,如 $A_j^{(i)}$ 与 $A_i^{(j)}$ 的构成元素是相同的.因此,下面证明引理 9 时,只给出 $k\leqslant[\frac{m}{2}]$的情形.

证明 由表的第一、二行及构成规则立即看出命题对 $k=1$ 是成立的.

假设命题对 $k-1$ 成立,考察 k 的情况,对 $i=2$ 可直接验证其正确性.假设对 $i-1$ 成立,由于

$$A_k^{(i)}=\mathrm{diag}((\det E_{m-k-i+2})A_{k-1}^{(i)},E_{m-k-i+2}\times\overline{A}_{k-1}^{(i)},A_k^{(i-1)}),$$

由假设,$A_{k-1}^{(i)}$和 $A_k^{(i-1)}$ 及 $\overline{A}_{k-1}^{(i)}$对命题条件成立.根据引理 8,存在可逆阵 P,Q,R 使

$$P'A_{k-1}^{(i)}P=\mathrm{diag}(B_1,E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_{t_1}}),$$

$$Q'A_k^{(i-1)}Q=\mathrm{diag}(B_2,E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_{t_2}}),$$

$$R'\overline{A}_{k-1}^{(i)}R=\mathrm{diag}(B_3,E_{j_1}\times E_{j_2},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_{t_3}}),$$

$E_{j_1},E_{j_2},\cdots,E_{j_{t_i}}(i=1,2,3)$取自 $E_{m-i-k+3},\cdots,E_m$,且 $t_1=2k-3\leqslant m-1$,$t_2=2k-1\leqslant m-1$,$t_3=2k-2\leqslant\begin{cases}m-2 & m\text{ 为偶数}\\ m-1 & m\text{ 为奇数}\end{cases}$,$B_i(i=1,2,3)$是 E_{j_t}的 Kronecker 积为对角块的矩阵,由引理 7,$E_{m-k-i+2}\times\overline{A}_{k-1}^{(i)}$合同于 $E_{m-k-i+2}\times\mathrm{diag}(B_3,\overline{A}_{k-1}^{(i)})$.再由引理 6,合同于 $\mathrm{diag}(E_{m-k-i+2}\times B_3,E_{m-k-i+2}\times\widetilde{A}_k^{(i)})$.由此可见,它的正定决定型矩阵为 $\mathrm{diag}(E_{m-k-i+2}\times E_{j_1}\times E_{j_2},\cdots,E_{m-k-i+2}\times$

$E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_{t_3}})=\mathrm{diag}\,(E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_t}),E_{j_1},E_{j_2},\cdots,E_{j_t}$取自$E_{m-k-i+2},E_{m-k-i+3},\cdots,E_m,t=t_3+1=2k-1$.

同样证明$\widetilde{A}_k^{(i)}$.

定理 4 的证明 由(4)的构成及引理 3、4、5 知,$C_{2k+1}(u_{2m})$正定的充要条件是 $A_k^{(i)},E_{m-k-i}\times\overline{A}_k^{(i)}(i=1,2,\cdots,m-k)$均正定. 由引理 9 的证明可知,只需讨论 $i\leqslant k$ 的情形. 于是由引理 9 得其充要条件是 $E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3},E_{j_1}\times E_{j_2}\times E_{j_3}\times E_{j_4}\times E_{j_5},\cdots,E_{j_1}\times E_{j_2}\times\cdots\times E_{j_t}$都正定. 其中$E_{j_1},E_{j_2},\cdots,E_{j_t}$取自 $E_1,E_2,\cdots,E_m,j_1<j_2<\cdots<j_t,t=2k+1$. 证毕.

对其必要条件有更具体的结果.

引理 10 $E\times A$ 正定,必有 A 正定.

引理 11 $\mathrm{diag}(A,E\times A)$正定的充分必要条件是 $E\times A$ 正定.

引理 12 $E_t\times E_s$ 正定的充要条件是 $1-a_t^2a_s^2>0$.

由上述引理得

定理 5 $C_{2k+1}(u_{2m})$正定的必要条件是 $1-a_i^2a_j^2>0,1<i<j\leqslant m$.

该条件并非充分,如

$$E_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\ E_3=I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ u=\mathrm{diag}(E_1,E_2,E_3),$$

有 $C_3(u_6)=\mathrm{diag}\,(5\mathrm{diag}\,(E_2,E_3),E_1\times\mathrm{diag}\,(\frac{5}{4},E_2\times E_3,1),\frac{5}{4}E_3,E_2)$,由于 $E_1\times E_2\times E_3$ 非正定,由定理 4,$C_3(u_6)$非正定. 但定理 5 条件满足.

(5)的情况同样讨论,这里不再赘述.

参 考 文 献

[1] M. Marcus, *Finite Dimensional Multilinear Algebra*, Part Ⅱ, Marcel Dekker, Inc. New York, 1975.

[2] 李炯生,实方阵的正定性,数学的实践与认识,3(1985).

The Positive Definiteness of Compound Matrices of the Real Positive Definite Matrices

Jiang Zhongzhang

(Jinhua Educational College of Zhejiang, 321000)

Abstract

We discuss the positive definition of compound matrices of the real positive definite matrix, and gives one necessary and sufficient condition that the compound matrices of the real positive definite matrix is still the positive definite matrix.

Keywords real positive definite matrix, compound matrces.