第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

两个四元数自共轭矩阵乘积的特征值估计*

周 金 土
(浙江师范大学，金华 321004)

摘 要 设 A 和 B 都是四元数自共轭半正定矩阵，或者其中之一是正定的，而另一个是自共轭的，本文改进并推广了[2]对乘积 AB 的特征值估计.

关键词 可中心化矩阵，四元数矩阵的特征值.
分类号 AMS(1991) 15A18/CCL O151.21

文[1],[2],[3]先后给出了两个四元数自共轭矩阵乘积的特征值估计. 其中以[2]中的估计最佳：设 $A>0,B\geqslant 0$，或 $A\geqslant 0,B>0$，则

$$\max_{s+t=n+i}\lambda_s(A)\lambda_t(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\lambda_t(B). \tag{1}$$

但对于 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$ 的情形，[2]的系 6 仅给出如下估计

$$\lambda_n(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_1(B). \tag{2}$$

显然(2)对 $\lambda_i(AB)$ 的估计比(1)要粗糙得多. 而(1)对 $\lambda_i(AB)$ 的估计虽然比较好，但受到 $A>0$ 或 $B>0$ 的限制. 本文将对 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$ 的情形改进(2)对 $\lambda_i(AB)$ 的估计.

设 Q 表示四元数体，$SC_n(Q)$ 表示 Q 上 n 阶自共轭矩阵全体. 用 $Q^{n\times m}$ 表示 Q 上 $n\times m$ 矩阵全体，A 的共轭转置矩阵记为 A^*，记号 $A\geqslant 0(A>0)$ 表示 A 为自共轭半正定(正定)矩阵. 设 $A\in SC_n(Q)$，则 A 的 n 个实特征值用 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$ 表示. 本文所指的矩阵特征值同[4].

引理 1[7] 设 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$ 或 $A\in SC_n(Q),B>0$，则 AB,BA 均可中心化，相似于同一实对角阵，它们的特征值相同且全为实数.

引理 2[7] 设 $B=\begin{pmatrix}B_1 & B_2^*\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}\geqslant 0$，则方程 $B_1X^*=B_2^*$ 有解.

引理 3[2] 设 $A\in SC_n(Q),C\in Q^{n\times k},\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_k$ 为 C 的奇异值，则对任意的 $1\leqslant i\leqslant k$ 有

$$\lambda_i(C^*AC)\leqslant\begin{cases}\min\limits_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\sigma_t^2, & \lambda_s(A)\geqslant 0,\\ \min\limits_{t-s=k-i}\lambda_s(A)\sigma_t^2, & \lambda_s(A)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\lambda_i(C^*AC)\geqslant\begin{cases}\max\limits_{s+t=n+i}\lambda_s(A)\sigma_t^2, & \lambda_s(A)\geqslant 0,\\ \max\limits_{\substack{s-t=n+i-(k+1),n\geqslant k\text{时}\\ t-s=(k+1)-n-i,n<k\text{时}}}\lambda_s(A)\sigma_t^2, & \lambda_s(A)\leqslant 0.\end{cases}$$

* 1992年9月25日收到.

引理 4 设 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$,或者 $A>0,B\in SC_n(Q)$,则 A^2B 与 ABA 相似,因此它们的特征值全为实数,且 $\lambda_i(A^2B)=\lambda_i(ABA)$,$1\leqslant i\leqslant n$.

证明 当 $A>0$ 时,$A^2B=A(ABA)A^{-1}$,$BA^2=A^{-1}(ABA)A$,且 $ABA\in SC_n(Q)$. 由[4]知 A^2B,BA^2 均可中心化,相似于同一个实对角阵且 n 个特征值与 ABA 相同,全为实数. 现在设 $A\geqslant 0,B\geqslant 0$,由[5],存在广义酉矩阵 U,使 $UAU^*=\begin{pmatrix}D & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,其中 $D=\mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r)$,$r=$秩$(A)<n$,$d_i>0$,$1\leqslant i\leqslant r$,因此

$$\begin{bmatrix}D^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}UAU^*\begin{bmatrix}D^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}, \tag{3}$$

记 $\begin{bmatrix}D^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}UBU^*\begin{bmatrix}D^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}B_1 & B_2^*\\ B_2 & B_3\end{pmatrix}$,此矩阵仍为半正定的. 据引理 2,存在 X_0,使 $B_1X_0^*=B_2^*$. 令 $H=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ -X_0 & I\end{pmatrix}$,则

$$H\begin{bmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}UBU^*\begin{bmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}H^*=\begin{pmatrix}B_1 & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$H^{*-1}\begin{bmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}UAU^*\begin{bmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}H^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{5}$$

因 $B_1\geqslant 0$,存在酉矩阵 V,使 $VB_1V^*=J=\mathrm{diag}(b_1,\cdots,b_s,0,\cdots,0)$,$s\leqslant r$,$b_i>0$. 用 $\begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}V^* & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}$ 分别左、右乘(4),(5)两端,并记

$$L=\begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}H^{*-1}\begin{bmatrix}D^{-\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}U,\quad M=\begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}H\begin{bmatrix}D^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}U,$$

则得

$$LAM^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{6}$$

及 $MBL^-=\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & *\end{pmatrix}$. 因此有

$$LABL^{-1}=MBAM^{-1}=\begin{pmatrix}J & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

计算得

$$ML^{-1}=\begin{bmatrix}VDV^* & -VDX_0^*\\ -X_0DV^* & X_0DX_0^*+I\end{bmatrix}. \tag{8}$$

用(8)分别左、右乘(6)得

$$LAL^{-1}=\begin{pmatrix}VDV^* & -VDX_0^*\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad MAM^{-1}=\begin{pmatrix}VDV^* & 0\\ -X_0DV^* & 0\end{pmatrix}.$$

用此二式依次乘(7)中两式得

$$LA^2BL^{-1}=\begin{pmatrix} VDV^*J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad MABAM^{-1}=\begin{pmatrix} VDV^*J & 0 \\ -X_0DV^*J & 0 \end{pmatrix}.$$

取 $T=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ X_0V^* & I \end{pmatrix}$,则 $TM(ABA)M^{-1}T^{-1}=\begin{pmatrix} VDV^*J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 因此 $L(A^2B)L^{-1}=(TM)(ABA)(TM)^{-1}$,$A^2B$ 相似于可中心化的具实特征值的自共轭矩阵 ABA,因此它们的特征值相同且全为实数.(注:按[6]的特征值定义,相似矩阵的特征值未必相同,但按本文即[4]的特征值定义,两个矩阵相似且其中之一可中心化,那么它们的特征值相同)证毕.

设 A,B 都是半正定的,或其中之一是正定的,另一个是自共轭的,由引理 1 知 $\lambda_i(AB)$全为实数. 设 $\lambda_1(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A),\lambda_1(B)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(B),\lambda_1(AB)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(AB)$,则有

定理 1 设 $B\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n$.

(i) 若 $A\geqslant 0$,则 $\max\limits_{s+t=n+i}\lambda_s(A)\lambda_t(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min\limits_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\lambda_t(B)$;

(ii) 若 $A\leqslant 0$,则 $\max\limits_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\lambda_t(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min\limits_{s+t=n+i}\lambda_s(A)\lambda_t(B)$;

(iii) $A\in SC_n(Q),B>0$,则

$$\max_{j+l=n+i}\lambda_j(A)\lambda_l(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\lambda_t(B),\quad \lambda_s(A)\geqslant 0,\lambda_j(A)\geqslant 0,$$
$$\max_{j-l=i-1}\lambda_j(A)\lambda_l(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\lambda_t(B),\quad \lambda_s(A)\geqslant 0,\lambda_j(A)\leqslant 0,$$
$$\max_{j-l=i-1}\lambda_j(A)\lambda_l(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min_{t-s=n-1}\lambda_s(A)\lambda_t(B),\quad \lambda_s(A)\leqslant 0,\lambda_j(A)\leqslant 0.$$

证明 因 $B\geqslant 0$,则$(B^{\frac{1}{2}})^*=B^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}\geqslant 0$,因此由引理 4 可知 $\lambda_i(AB)=\lambda_i(BA)=\lambda_i(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})=\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}})$. 设 $B^{\frac{1}{2}}$的奇异值为 $\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n$. 则 σ_t^2 为 B 的特征值,即 $\sigma_t^2=\lambda_t(B),1\leqslant t\leqslant n$. 当 $A\geqslant 0$ 时,由(7)知 $\lambda_i(AB)\geqslant 0$,而 $\lambda_s(A)\geqslant 0,1\leqslant s\leqslant n$. 由引理 3,取 $k=n$,则有

$$\max_{s+t=n+i}\lambda_s(A)\sigma_t^2\leqslant\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}})\leqslant\min_{s+t=i+}\lambda_s(A)\sigma_t^2.$$

由 $\sigma_t^2=\lambda_t(B),\lambda_i(AB)=\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}})$即得(i).

当 $A\leqslant 0$ 时,$-A\geqslant 0,\lambda_s(-A)\geqslant 0,1\leqslant s\leqslant n$,利用(i)即可得(ii).

当 $A\in SC_n(Q),B>0$ 时,由引理 4,仍有 $\lambda_i(AB)=\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}}),1\leqslant i\leqslant n$. 由引理 3,当 $\lambda_s(A)\geqslant 0$ 时,若存在 $\lambda_j(A)\geqslant 0$ 使 $j+l=n+i$,则有

$$\max_{j+l=n+i}\lambda_j(A)\sigma_l^2\leqslant\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}})\leqslant\min_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\sigma_t^2.$$

由此即得(iii)中第一式. 如果当 $\lambda_s(A)\geqslant 0$ 时,使 $j+l=n+i$ 的 $\lambda_j(A)\geqslant 0$ 不存在,则由引理 3 知 $\max\limits_{j-l=i-1}\lambda_j(A)\sigma_l^2\leqslant\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}}),\lambda_j(A)\leqslant 0$. 由此立即可得(iii)中的第二式. 至于 $\lambda_s(A)\leqslant 0,\lambda_j\leqslant 0$ 时,由引理 3,$\max\limits_{j-l=i-1}\lambda_j(A)\sigma_l^2\leqslant\lambda_i((B^{\frac{1}{2}})^*AB^{\frac{1}{2}})\leqslant\min\limits_{t-s=n-i}\lambda_s(A)\sigma_t^2$,故有(iii)的第三式. 证毕.

另一种简单估计是

推论 设 $B\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n$

(i) 若 $A\geqslant 0$,则 $\lambda_i(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_i(A)\lambda_1(B)$;

(ii) 若 $A\leqslant 0$,则 $\lambda_i(A)\lambda_1(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_i(A)\lambda_n(B)$;

(iii) 若 $A\in SC_n(Q)$,$B>0$,则

$$\lambda_i(A)\lambda_n(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_i(A)\lambda_1(B),\quad \lambda_i(A)\geqslant 0,$$

$$\lambda_i(A)\lambda_1(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\lambda_i(A)\lambda_n(B),\quad \lambda_i(A)\leqslant 0.$$

这是定理 1 的特殊情形. 这一估计虽然不及定理 1 好,但它还是比[2]和[1]好.(见[2]的系 6,即本文中的(2))

例子 使 $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 0\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 4 & \\ & & & 6\end{pmatrix}$,$\lambda_1(A)=\frac{7}{2}$,$\lambda_2(A)=\lambda_3(A)=3$,$\lambda_4(A)=0$,$\lambda_1(B)=6$,$\lambda_2(B)=4$,$\lambda_3(B)=1$,$\lambda_4(B)=0$,$A\geqslant 0$,$B\geqslant 0$. 利用定理 1,$\max\limits_{s+t=5}\lambda_s(A)\lambda_t(B)\leqslant\lambda_1(AB)\leqslant\lambda_1(A)\lambda_1(B)$. 即有 $12\leqslant\lambda_1(AB)\leqslant 21$. 同样可得 $3\leqslant\lambda_2(AB)\leqslant 14$,$0\leqslant\lambda_3(AB)\leqslant\frac{7}{2}$,$\lambda_4(AB)=0$. 而按[1]和[2]的估计,即按(2)估计,$0\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant 21$,$1\leqslant i\leqslant 4$.

参 考 文 献

[1] 曹重光,二个四元数自共轭半正定矩阵乘积的特征值估计,数学研究与评论,1(1990).

[2] 黄礼平,四元数矩阵的特征值与奇异值,数学研究与评论,3(1992).

[3] 刘建洲、谢清明,四元数自共轭矩阵乘积的特征值不等式,数学研究与评论,3(1992).

[4] 谢邦杰,体上矩阵的特征根与标准形式的应用,数学学报,23(1980),522—533.

[5] 谢邦杰,任意体上可中心化矩阵的行列式,吉林大学自然科学学报,3(1980).

[6] 屠伯埙,强 p 除环上矩阵的酉相似理论,数学研究与评论,1(1988).

[7] 曹重光,四元数自共轭矩阵的几个定理,数学研究与评论,3(1988).

Estimation of Eigenvalues for Product of two Self-Conjugate Positive Semi-Definite Quaternion Matrices

Zhou Jintu

(Dept. of Math., Zhejiang Normal University, Jinhua 321000)

Abstract

Let A and B be self-conjugate quaternion matrices. This paper proves:

Theorem Let $A\geqslant 0$ and $B\geqslant 0$. Then

$$\max_{s+t=n+i}\lambda_s(A)\lambda_t(B)\leqslant\lambda_i(AB)\leqslant\min_{s+t=i+1}\lambda_s(A)\lambda_t(B).$$

Keywords centralizable matrix, eigenvalues of quaternion matrix.