第15卷 增刊
1995年11月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 15 Supp
Nov. 1995

Schur 定理在四元数体上的推广*

官 为 国
(江苏丹阳市大泊成教中心校)

关键词 四元数矩阵,特征值,酉相似.

分类号 AMS(1991) 15A/CCL O151.21

本文指出:Schur 定理可推广到任意四元数方阵上. 与[1],[2]不同的是,本文所讨论的四元数方阵,不附加任何条件.

设 R 是实数域,$Q=\{a+bi+cj+dk\,|\,a,b,c,d\in R\}$ 为实数域 R 上的四元数体. 设 A 为四元数阵,则 $A=A_1+A_2j$,这里 A_1,A_2 均为域 $R(i)$ 上的矩阵.

引理 1 如果 $\lambda\in R(i)$,M 为域 $R(i)$ 上的矩阵,则 $j\lambda=\bar{\lambda}j$,$jM=\overline{M}j$.

证明 因为 $ji=-ij$,所以引理 1 成立. 证毕.

引理 2 如果 M,N 均为域 $R(i)$ 上的矩阵,则 $\overline{MN}=\overline{M}\,\overline{N}$.

此引理显然成立.

引理 3 如果 A 为 n 阶四元数阵,则 A 至少有一个右特征值[1].

证明 设 $A=A_1+A_2j$,这里 A_1,A_2 均为域 $R(i)$ 上的 n 阶阵. 令 $M=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -\overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{pmatrix}$,则 M 为 $2n$ 阶阵. 因为 M 为域 $R(i)$ 上的方阵,而 $R(i)$ 与复数域同构,所以存在 $\lambda\in R(i)$ 和 $R(i)$ 上的 $2n$ 维非零列向量 Y,使 $MY=\lambda Y$. 因为 $\lambda\in R(i)$ 且 Y 为 $R(i)$ 上的向量,所以 $\lambda Y=Y\lambda$,

$$MY=Y\lambda. \tag{1}$$

设 $Y=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}$,这里 Y_1,Y_2 均为 $R(i)$ 上的 n 维向量. 由(1),得

$$\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ -\overline{A}_2 & \overline{A}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Y_1\\ Y_2\end{pmatrix}\lambda.$$

由此

$$A_1Y_1+A_2Y_2=Y_1\lambda, \tag{2}$$

$$-\overline{A}_2Y_1+\overline{A}_1Y_2=Y_2\lambda. \tag{3}$$

由(3),得 $\overline{-\overline{A}_2Y_1+\overline{A}_1Y_2}=\overline{Y_2\lambda}$. 根据引理 2,$-A_2\overline{Y}_1+A_2\overline{Y}_2=\overline{Y}_2\bar{\lambda}$,即

$$A_2\overline{Y}_1-A_2\overline{Y}_2=-\overline{Y}_2\bar{\lambda}. \tag{4}$$

由(2)和(4),得

$$A_1Y_1+A_2Y_2+(A_2\overline{Y}_1-A_1\overline{Y}_2)j=Y_1\lambda-\overline{Y}_2\bar{\lambda}j. \tag{5}$$

* 1992年9月21日收到.

根据引理 1，

$$(A_1 + A_2j)(Y_1 - \overline{Y}_2j) = A_1Y_1 + A_2Y_2 + (A_2\overline{Y}_1 - A_1\overline{Y}_2)j, \tag{6}$$

$$(Y_1 - \overline{Y}_2j)\lambda = Y_1\lambda - \overline{Y}_2\overline{\lambda}j. \tag{7}$$

由(5)，(6)，(7)，得

$$(A_1 + A_2j)(Y_1 - \overline{Y}_2j) = (Y_1 - \overline{Y}_2j)\lambda,$$

即 $A(Y_1-\overline{Y}_2j)=(Y_1-\overline{Y}_2j)\lambda$. 令 $X=Y_1-\overline{Y}_2j$，则 X 为 n 维非零向量(因为 $Y\neq 0$，因此 $Y_1\neq 0$ 或 $Y_2\neq 0$，所以 $X\neq 0$)，且 $AX=X\lambda$. 由此 λ 为 A 的右特征值，证毕.

引理 4 设 A 为 n 阶四元数阵. 如果 λ 为 A 的一个右特征值，则 A 相似于$\begin{pmatrix}\lambda & * \\ 0 & B\end{pmatrix}$，这里 B 为$(n-1)$阶四元数阵.

证明 因为 λ 为 A 的一个右特征值，所以存在 n 维非零列向量 X，使

$$AX = X\lambda. \tag{8}$$

设 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$；则存在 $l(1\leqslant l\leqslant n)$，使 $x_l\neq 0$. 设 e_i 为第 i 个元素等于 1 而其余元素均为零的 n 维列向量. 易知 $X,e_1,e_2,\cdots,e_{l-1},e_{l+1},\cdots,e_n$ 在 Q 上线性无关(这里，在讨论列向量的线性关系时，Q 中元素在右边乘以列向量)，令 $P=(X\,\vdots\,e_1\,\vdots\,e_2\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,e_{l-1}\,\vdots\,e_{l+1}\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,e_n)$(这里"$\vdots$"表示分块)，则 P 非奇. 设

$$P^{-1}AP = C, \tag{9}$$

则 $AP=PC$. 设 C 的第 1 列为$\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$. 易知 AP 的第 1 列为 AX，而 PC 的第 1 列为 $P\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$，所以 $AX=P\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$，即 $AX=(X\,\vdots\,e_1\,\vdots\,e_2\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,e_{l-1}\,\vdots\,e_{l+1}\,\vdots\,\cdots\,\vdots\,e_n)\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}$，亦即 $AX=Xk_1+e_1k_2+e_2k_3+\cdots+e_{l-1}k_l+e_{l+1}k_{l+1}+\cdots+e_nk_n$. 由(8)，得 $X(k_1-\lambda)+e_1k_2+e_2k_3+\cdots+e_{l-1}k_l+e_{l+1}k_{l+1}+\cdots+e_nk_n=0$. 因为 $X,e_1,e_2,\cdots,e_{l-1},e_{l+1},\cdots,e_n$ 在 Q 上线性无关，所以 $k_1=\lambda,k_2=k_3=\cdots=k_n=0$. 即 C 的第 1 列为$\begin{pmatrix}\lambda\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$. 根据(9)，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & * \\ 0 & B\end{pmatrix}$，这里 B 为 $n-1$ 阶矩阵. □

引理 5 每个四元数方阵都相似于上三角阵.

证明 设 A 为任意四元数方阵，对 A 的阶用数学归纳法. 当 A 的阶等于 1 时，结论显然成立. 假设当 A 的阶等于 $n-1$ 时结论成立. 当 A 的阶等于 n 时，根据引理 3 和引理 4，存在非奇异阵 P，使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda & * \\ 0 & B\end{pmatrix}$，这里 B 为 $n-1$ 阶四元数阵. 根据归纳法假设，存在非奇异方阵

S,使 $S^{-1}BS=C$,这里 C 为上三角阵. 令 $T=P\begin{pmatrix}1&0\\0&S\end{pmatrix}$,则 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}\lambda&*\\0&C\end{pmatrix}$. 因为 C 为上三角阵,所以$\begin{pmatrix}\lambda&*\\0&C\end{pmatrix}$为上三角阵. 证毕.

引理 6 设 α 是一个四元数,则存在四元数 $q\neq0$,使 $q^{-1}\alpha q=\lambda$,这里 $\lambda\in R(i)$.

证明 设 $\alpha=a_1+a_2i+a_3j+a_4k$,这里 a_1,a_2,a_3,a_4 均属于 R. 令 $\lambda=a_1+\sqrt{a_2^2+a_3^2+a_4^2}i$,则 $\lambda\in R(i)$. 易知 $\lambda+\bar\lambda=\alpha+\bar\alpha$, $\lambda\bar\lambda=\alpha\bar\alpha$. 根据[3]第一章 § 9 引理 1,存在四元数 $q\neq0$,使 $q^{-1}\alpha q=\lambda$. □

对四元数 α,令 $N(\alpha)=\alpha\bar\alpha$.

定理 1 对任意四元数方阵 A,存在广义酉阵 u,使

$$\overline{U}'AU=\begin{pmatrix}\lambda_1&t_{12}&t_{13}&\cdots&t_{1n}\\&\lambda_2&t_{23}&\cdots&t_{2n}\\&&\lambda_3&\cdots&t_{3n}\\&&&\ddots&\vdots\\0&&&&\lambda_n\end{pmatrix},\tag{10}$$

这里 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in R(i)$.

证明 根据引理 5,存在非奇异阵 P,使 $A=PR_1P^{-1}$,这里 R_1 为上三角阵. 根据[1]引理 2,存在广义酉矩阵 U_1 和非奇异上三角阵 R_2,使 $P=U_1R_2$. 由此 $A=U_1R_2R_1R_2^{-1}U_1^{-1}$. 令 $R_3=R_2R_1R_2^{-1}$,则

$$U_1^{-1}AU_1=R_3.\tag{11}$$

因为 U_1 为广义酉阵,所以

$$U_1^{-1}=\overline{U}'_1.\tag{12}$$

由(11),(12),知

$$\overline{U}'_1AU_1=R_3.\tag{13}$$

易知 $R_3=R_2R_1R_2^{-1}$ 为上三角阵([1],p13)已指出这个事实),即 $R_3=\begin{pmatrix}\alpha_1&&*\\&\alpha_2&\\&&\ddots&\\0&&&\alpha_n\end{pmatrix}$. 根据引理 6,存在非零四元数 $q_1,q_2,\cdots,q_n$,使

$$q_k^{-1}\alpha_kq_k=\lambda_k(k=1,2,\cdots,n),\tag{14}$$

这里 $\lambda_k\in R(i)(k=1,2,\cdots,n)$. 令 $U_2=\mathrm{diag}\{(\sqrt{N(q_1)})^{-1}q_1,(\sqrt{N(q_2)})^{-1}q_2,\cdots,(\sqrt{N(q_n)})^{-1}q_n\}$,则 U_2 为广义酉阵. 根据(14),$[(\sqrt{N(q_k)})^{-1}q_k]^{-1}\lambda_k=[(\sqrt{N(q_k)})^{-1}q_k]=\lambda_k(k=1,2,\cdots,n)$. 由此

$$\overline{U'_2}R_3U_3=U_2^{-1}R_3U_2=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&*\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\0&&&\lambda_n\end{pmatrix}.\tag{15}$$

令 $U=U_1U_2$，则 U 为广义酉阵. 根据(13)和(15)，

$$\overline{U}'AU=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$ □

定义 设 A 为四元数阵. 如果 $A\overline{A}'=\overline{A}'A$，则称 A 为广义正规阵.

注 上述定义中，不假设 A 可中心化. 这与[1]所给的定义是不同的(见文[1]p133). 利用文[1]的方法可以证明下面几个结论成立.

定理 2 四元数方阵 A 是广义正规阵的充要条件是 A 酉相似于对角阵.

定理 3 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶四元数阵. 如果 A 酉相似于(10)式右边的上三角阵，则

(i) $\sum\limits_{i,j=1}^{n}N(a_{ij})=\sum\limits_{i=1}^{n}N(\lambda_i)+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}N(t_{ij})$；

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n}N(\lambda_i)\leqslant\sum\limits_{i,j=1}^{n}N(a_{ij})$，等号成立当且仅当 A 为广义正规阵.

注 本文的结果可推广到加强 p 除环上.

参 考 文 献

[1] 屠伯埙，数学年刊，9:2(1988)，130—138.

[2] 屠伯埙，数学研究与评论，9:1(1989)，1—7.

[3] 华罗庚、万哲先，典型群，上海科学技术出版社，1963.

An Extension of Schur Theorem over the Real Quaternion Division Ring

Gong Weiguo

(Daba Adult Education Center, Danyang, Jiangsu)

Abstract

In this paper, we show that every matrix over the real quaternion division ring is unitary similar to an upper triangular matrix.

Keywords matrix, quaternion division ring, triangular matrix.