第15卷 增刊 数学研究与评论 Vol. 15 Supp
1995年11月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Nov. 1995

Wielandt-Hoffman 定理在四元数体上的推广*

伍 俊 良

(重庆师范学院,重庆 630047)

摘 要 本文将 Wielandt-Hoffman 定理的一种对称形式推广到四元数体上,得到了自共轭矩阵二项式的广义 F-范数估计定理和一个幂迹定理.

关键词 四元数矩阵,广义 F-范数,Wielandt-Hoffman 定理.

分类号 AMS(1991) 15A33/CCL O151.21

Wielandt-Hoffman 定理在计算数学中有着十分重要的作用. 文[1]—[3]对其作过一些探讨,但均侧重于对该定理的一些证法的研究,实质性进展不大. 鉴于体上代数理论研究的重大进展,对实矩阵,复矩阵方面的主要结论不断扩充和发展成为必然. 本文首先得到体上两自共轭矩阵和的特征值的一个结果,在此基础上得出体上自共轭矩阵二项式的一个特征值估计和一个幂迹定理.

本文约定:$H^{n\times n}$为一切 $n\times n$ 阶四元数矩阵的集合,$\widetilde{H}^{n\times n}$为四元数体上自共轭 $n\times n$ 阶矩阵的集合,$\widetilde{H}_{+}^{n\times n}$为体上半正定自共轭 $n\times n$ 阶矩阵的集合. $\widetilde{H}_{++}^{n\times n}$为体上正定 $n\times n$ 阶矩阵集合. $H_{U}^{n\times n}$ 为体上广义酉阵的集合. 显然 $H^{n\times n}\supset\widetilde{H}^{n\times n}\supset\widetilde{H}_{+}^{n\times n}\supset\widetilde{H}_{++}^{n\times n}$.

定义 1 体上矩阵 $B=(\Delta_{ij})|_{i,j=1}^{n}$ 其任意元素 $\Delta_{ij}=a_{ij}+b_{ij}i+c_{ij}j+d_{ij}k$,记 $\|B\|_F=\sqrt{\sum_{ij}|\Delta_{ij}|^2}$,其中 $|\Delta_{ij}|=\sqrt{a_{ij}^2+b_{ij}^2+c_{ij}^2+d_{ij}^2}$,容易验证 $\|\cdot\|_F$ 为 $H^{n\times n}$ 上矩阵范数,称它为广义 F-范数.

定义 2 设 $U=(u_{ij})\in H^{n\times n}$,如果 $UU^H=E$,则称 U 为广义酉阵.

引理 1 设 $A\in\widetilde{H}_{+}^{n\times n}$,$\forall\, B\in H^{n\times n}$,有 $|\mathrm{tr}AB|\leqslant\mathrm{tr}A\,\|B\|_F$.

证明 令 A 的特征值为 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant0$,由[4]定理 13,恒有广义酉阵 U,使 $A=U^H\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)U$. 记 $C=UBU^H=(c_{ij})_{n\times n}$,$U=(u_{ij})_{n\times n}$,则 $\mathrm{tr}AB=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_{ii}$,$C_{ii}=\sum_{j=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n}u_{ir}b_{rj})u_{ij}$,连续施用许瓦兹不等式得

$$|c_{ii}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}|u_{ir}b_{rj}|\,|u_{ij}|\leqslant\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{r=1}^{n}|u_{ir}b_{rj}|)^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}|u_{ij}|^2}$$

* 1993年10月4日收到.

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}|u_{i\tau}b_{\tau j}|)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n}[(\sum_{i=1}^{n}|u_{i\tau}|^2)(\sum_{i=1}^{n}|b_{\tau j}|^2]}$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|b_{ij}|^2} = \| B \|_F ,$$

因此 $|\mathrm{tr}AB| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i c_{ii}| \leqslant \mathrm{tr}A \| B \|_F$.

引理 2 设 $A_i \in H_{+}^{n\times n}(i=1,2,\cdots,m)$，则 $|\mathrm{tr}A_1A_2\cdots A_m| \leqslant \mathrm{tr}A_1\cdots\mathrm{tr}A_m$.

证明 设 $A_i(i=1,2,\cdots,m)$ 的特征值为：$\lambda_1^{(i)} \geqslant \lambda_2^{(i)} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n^{(i)} \geqslant 0$，由 $\| A_i \|_F = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(\lambda_j^{(i)})^2} \leqslant \sqrt{(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^{(i)})^2} = \mathrm{tr}A_i$. 因此，$|\mathrm{tr}A_1A_2\cdots A_m| \leqslant \mathrm{tr}A_1 \| A_2A_3\cdots A_m \|_F \leqslant \mathrm{tr}A_1 \| A_2 \|_F \cdots \| A_m \|_F \leqslant \mathrm{tr}A_1\mathrm{tr}A_2\cdots\mathrm{tr}A_m$.

定理 1 设 $A \in \widetilde{H}^{n\times n}, B \in \widetilde{H}^{n\times n}, C = A + B$，又 A, B, C 的特征值分别为：$\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n, \gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \cdots \geqslant \gamma_n$，则 $\| A + B \|_F \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i + \lambda_i)^2}$.

证明 取 A, B, C 的广义酉分解分别为：

$$A = U_1^H \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) U_1,$$

$$B = U_2^H \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U_2,$$

$$C = U_3^H \mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) U_3,$$

其中 $U_1, U_2, U_3 \in H_U^{n\times n}$.

首先假定 $A \in \widetilde{H}_{++}^{n\times n}$，则 $\mu_i > 0 (i=1,2,\cdots,n)$

$$\mathrm{tr}A^2 = \mathrm{tr}[(U_1^H \mathrm{diag}(\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2) U_1]$$

$$= \mathrm{tr}[\mathrm{diag}(\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_n^2) U_1 U_1^H] = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2.$$

同理 $\mathrm{tr}B^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2, \mathrm{tr}C^2 = \sum_{i=1}^{n}\gamma_c^2$.

又

$$\mathrm{tr}C^2 = \mathrm{tr}(A^2 + AB + BA + B^2) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}BA$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\mu_i + \lambda_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i + \mathrm{tr}AB + \mathrm{tr}BA.$$

下证 $\mathrm{tr}AB \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i$. 而 $\mathrm{tr}AB \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i$，

$$\mathrm{tr}AB = \mathrm{tr}[U_1^H \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) U_1 U_2^H \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U_2]$$

$$= \mathrm{tr}[\mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) U_1 U_2^H \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) U_2 U_1^H],$$

记 $U_1 U_2^H = U = (\mu_{ij})_{n\times n}$，$U$ 仍为广义酉阵，则

$$\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}[\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)U\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_n)U^H]$$

$$=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)\begin{bmatrix}\bar{\mu}_{11}\mu_{11} & \bar{\mu}_{12}\mu_{12} & \cdots & \bar{\mu}_{1n}\mu_{1n}\\ \bar{\mu}_{21}\mu_{21} & \bar{\mu}_{22}\mu_{22} & \cdots & \bar{\mu}_{2n}\mu_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \bar{\mu}_{n1}\mu_{n1} & \bar{\mu}_{n2}\mu_{n2} & \cdots & \bar{\mu}_{nn}\mu_{nn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.$$

从而 $\operatorname{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\sum_{j=1}^{n}\bar{\mu}_{ij}\mu_{ij}\lambda_j=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\lambda_j$，其中

$$\sum_{i=1}^{n}t_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\bar{\mu}_{ij}\mu_{ij}=1\quad(j=1,2,\cdots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n}t_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\bar{\mu}_{ij}\mu_{ij}=1\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

又对任意 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\lambda_j)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-\sum_{i=1}^{k}(1-\sum_{j=1}^{k}t_{ij})\lambda_i+\sum_{i=1}^{k}(\sum_{j=k+1}^{n}t_{ij}\lambda_j)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i-\lambda_k\sum_{i=1}^{k}[(1-\sum_{j=1}^{k}t_{ij})-(1-\sum_{j=1}^{k}t_{ij})]=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i.$$

又 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n>0$. 故 $\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\sum_{j=1}^{n}t_{ij}\lambda_j)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i$. 即 $\operatorname{tr}(AB)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i$. 同理可证 $\operatorname{tr}BA\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2$，即 $\|A+B\|_F\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2}$.

如果 $A\notin\widetilde{H}_{++}^{n\times n}$，$A\in\widetilde{H}^{n\times n}$，则存在充分大的实数 $d>0$，使得 $A+dI\in\widetilde{H}_{++}^{n\times n}$. 从而 $\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i+d)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+(\mu_i+d)]^2$. 将 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i=\operatorname{tr}C=\operatorname{tr}(A+B)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)$ 代入上式即可得 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2$，即 $\|A+B\|_F\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2}$ 成立. 证毕.

推论 设 $A\in\widetilde{H}^{n\times n}$，$B\in\widetilde{H}^{n\times n}$，$C=B-A$，$A,B,C$ 的特征值分别为 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，$\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant\cdots\geqslant\gamma_n$，则 $\|B-A\|_F\geqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-\mu_i)^2}=e(A,B)$.

证明 由定理 1 的结果 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2$ 直接变形便可得证. 从而推论与定理 1 等价. 这便是 Wielandt-Hoffman 定理在四元数体上的推广.

定理 2 设 $A\in\widetilde{H}^{n\times n}$，$B\in\widetilde{H}^{n\times n}$，$C=A+B$，$A,B,C$ 的特征值分别为：$\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n$，$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$，$\gamma_1\geqslant\gamma_2\geqslant\cdots\geqslant\gamma_n$，则 $\|(A+B)^{2n}\|_F\leqslant\sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2]^n}$.

证明 显然 $C^{2n}=(A+B)^{2n}\in\widetilde{H}^{n\times n}$. 由引理 2 和定理 1 的证明知 $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{2n}=\operatorname{tr}C^{2n}\leqslant[\operatorname{tr}C^2]^n$

$$= [\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{2}]^{n} \leqslant [\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2]^{n}\text{，亦即 } \|(A+B)^{2n}\|_F \leqslant \sqrt{[\sum_{i=1}^{n}(\mu_i+\lambda_i)^2]^{n}}.$$

定理 3　设 $A\in\widetilde{H}^{n\times n}$，$B\in\widetilde{H}^{n\times n}$，$C=A+B$，则 $\mathrm{tr}C^{2n}\leqslant[(\sqrt{\mathrm{tr}A^2}+\sqrt{\mathrm{tr}B^2})^2]^n$.

证明　由定理 2 知，$\mathrm{tr}C^{2n} = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i^{2n} \leqslant [\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)^2]^n = [\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2]^n$.

由 Cauchy 不等式知 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2}$. 因此

$$\mathrm{tr}C^{2n}\leqslant [\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu_i + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2]^n \leqslant [\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2} + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2]^n$$

$$= [(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2})^2]^n = [(\sqrt{\mathrm{tr}A^2} + \sqrt{\mathrm{tr}B^2})^2]^n.$$

证毕.

参 考 文 献

[1] J. H. Wilknison, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Charendon Press. Oxford, 1965.

[2] 方定法，Wielandt-Hoffman 定理的一个简化证明，数学的实践与认识，12(1988).

[3] 孙继广，关于 Wielandt-Hoffman 定理，计算数学，2(1983).

[4] 谢邦杰，任意体上可中心化矩阵的行列式，吉林大学自然科学学报，3(1980).

[5] J. H. Wilkinson, *Almost diagonal matrices with multiple or close eigenvalues*, Lin. Alg. and Its Applic., 1(1968).

The Generalization of Wielandt-Hoffman Theorem on Quaternion Field

Wu Junliang

(Dept. of Math., Chongqing Teachers' College, 630047)

Abstract

In this paper, we generalize the symmetry form of Wielandt-Hoffman theorem to quaternion field, and obtain a generalized F-norm estimate theorem and a trace inequality.

Keywords　quaternion matrix, generalized F-norm, Wielandt-Hoffman theorem.