四元数自共轭矩阵和的特征值的不等式*

陶 跃 钢

(湖北教育学院数学系，武汉 430060)

摘 要 本文将 Wielandt 关于复自共轭矩阵的特征值和的变分特征以及和的特征值的不等式推广到四元数体上，由此还给出了复自共轭矩阵的主对角元与特征值的优化关系的 Schur 定理、复矩阵的主对角元的模与奇异值的优化关系的 Fan 定理在四元数体上的推广.

关键词 四元数矩阵，特征值，不等式.

分类号 AMS(1991) 15A33，15A45/CCL O151.21

自从谢邦杰[1]对四元数矩阵理论的研究取得新的进展以来，人们在四元数矩阵的特征值与奇异值的不等式方面有过不少工作[2,3,4]. 本文在文献[5]的基础上，运用四元数体上向量空间的子空间的特性，将 Wielandt[6]关于复自共轭矩阵的特征值和的变分特征以及和的特征值的不等式推广到四元数体上，它们是文献[4]的相应结果的一般情形. 此外，本文还运用优化不等式理论，给出复自共轭矩阵的主对角元与特征值的优化关系的 Schur 定理、复矩阵的主对角元的模与奇异值的优化关系的 Fan 定理在四元数体上的推广以及 Hadamard-谢邦杰定理的另一证明.

在本文里，仅个别场合例外，四元数矩阵理论的术语一般按文献[1]，优化不等式理论的术语一般按文献[7].

在谢邦杰的特征值意义下，记 n 阶四元数自共轭矩阵 A 的 n 个特征值为 $\lambda_1(A)\geqslant\lambda_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(A)$，$n\times m$ 四元数矩阵 A 的奇异值即指 $\sigma_i(A)=\sqrt{\lambda_i(A\overline{A}')}$，$i=1,\cdots,n$.

引理 1 设 $L_t,M_t(t=1,\cdots,k.)$ 是 n 维(右行)广义酉空间的子空间. 若 $\dim L_t\geqslant i_t$，$\dim M_t\geqslant n-i_t+1$，且 $M_1\supset\cdots\supset M_k$，这里 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，则分别存在广义标准正交的向量 $u_t\in L_t$ 和向量 $w_t\in M_t(t=1,\cdots,k)$，使得生成子空间 $\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_k)=\mathscr{L}(w_1,\cdots,w_k)$.

证明 对 k 用归纳法. 当 $k=1$ 时，由文献[8,Ch5，§1,Th6]知 $\dim(L_1\cap M_1)>0$，取单位向量 $\varepsilon\in L_1\cap M_1$ 便知引理成立. 假定 $k-1$ 时引理成立，即分别存在广义标准正交的向量 $u_t\in L_t$ 和向量 $v_t\in M_t(t=1,\cdots,k-1)$. 有 $\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_{k-1})=\mathscr{L}(v_1,\cdots,v_{k-1})$. 记

$$K=\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_{k-1})+\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_{k-1})^{\perp}\cap L_k,$$

则易知 $\dim K\geqslant\dim L_k\geqslant i_k$. 又记 $N_t=K\cap M_t(t=1,\cdots,k.)$，则

$$\dim N_t\geqslant k-t+1, N_1\supset\cdots\supset N_k,$$

且 $v_t\in N_t(t=1,\cdots,k-1.)$. 对 $v_{k-1}\in N_{k-1}$，由 $N_{k-1}\neq N_k$，必有 $w_{k-1}\in N_{k-1}$，$w_k\in N_k$，且 w_{k-1}，

* 1993 年 7 月 1 日收到.

w_k 可选为广义标准正交的，使得 $\mathscr{L}(v_{k-1})\subset\mathscr{L}(w_{k-1},w_k)$. 归纳假定 $\mathscr{L}(v_2,\cdots,v_{k-1})\subset\mathscr{L}(w_2,\cdots,w_k)$，这里 $w_i\in N_i(i=2,\cdots,k.)$是广义标准正交的. 当 $v_1\overline{\in}\mathscr{L}(w_2,\cdots,w_k)$时，$v_1$ 与 $w_2,\cdots,w_k$ 右线性无关，添加 v_1 于 $\mathscr{L}(w_2,\cdots,w_k)$；当 $v_1\in\mathscr{L}(w_2,\cdots,w_k)$时，则由 $\dim N_1\geqslant k$ 知 N_1 中存在与 $w_2,\cdots,w_k$ 右线性无关的向量 $\tilde{v}_1$，添加 $\tilde{v}_1$ 于 $\mathscr{L}(w_2,\cdots,w_k)$. 然后再注意到 $N_1\supset\cdots\supset N_k$，可取 $w_1,w_2,\cdots,w_k$ 为广义标准正交的，使得 $\mathscr{L}(v_1,\cdots,v_{k-1})\subset\mathscr{L}(w_1,\cdots,w_k)$. 又由 $\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_{k-1})^{\perp}\cap\mathscr{L}(w_1,\cdots,w_k)$的维数大于 0 而在其中取单位向量 u_k，且 $u_k\in L_k$. 于是分别存在广义标准正交的向量 $u_t\in L_t$ 和向量 $w_t\in M_t(t=1,\cdots,t)$. 有 $\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_k)=\mathscr{L}(w_1,\cdots,w_k)$. 归纳法完成.

引理 2　设 A 为 $n\times m$ 四元数矩阵，$\hat{A}=\begin{pmatrix}0 & \overline{A}'\\ A & 0\end{pmatrix}$，则 $\hat{A}$ 的 $m+n$ 个特征值从大到小依次为 $\sigma_1(A),\cdots,\sigma_s(A),0,\cdots,0,-\sigma_s(A),\cdots,-\sigma_1(A)$，其中 $s=\min(m,n)$.

证明　假定 $m\geqslant n$，$A=U\Delta\overline{V}'$是 A 的奇异值分解[2]，这里 $\Delta=(D,0)$，0 为 $n\times(m-n)$零矩阵，$D=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\cdots,\sigma_n(A))$. 记 $V=(V_1,V_2)$，V_1、V_2 分别是 $m\times n$、$m\times(m-n)$的广义标准正交的高矩阵，则

$$W=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & -\frac{1}{\sqrt{2}}V_1 & V_2\\ \frac{1}{\sqrt{2}}U & \frac{1}{\sqrt{2}}U & 0\end{pmatrix}$$

是广义酉矩阵. 于是，经过简单计算得

$$\hat{A}=W\begin{pmatrix}D & & \\ & -D & \\ & & 0\end{pmatrix}\overline{W}'.$$

由此易见引理的结论为真. 当 $m<n$ 时证明是类似的.

引理 3[7]　设 $u,v\in R^n_+$，$u\prec^w v$，则对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 有 $\prod\limits_{i=1}^{k}u_{(i)}\geqslant\prod\limits_{i=1}^{k}v_{(i)}$.

引理 4[7]　设 $u,v\in R^n$，$u\prec_w v$，则对于任意的 $x\in R^n_+$，$1\leqslant k\leqslant n$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{k}u_{[i]}x_{[i]}\leqslant\sum\limits_{i=1}^{k}v_{[i]}x_{[i]}$.

定理 1　设 A 是 n 阶四元数自共轭矩阵，则对于任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A)=\max_{\dim L_t=i_t}\ \min_{\substack{u_t\in L_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta_{st}}}\sum_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'.$$

证明　由文献[5, § 3]，设 ε_i 是 A 的对应于特征值 $\lambda_i(A)(i=1,\cdots,n.)$的广义标准正交的特征向量. 取 $M_t=\mathscr{L}(\varepsilon_{i_t},\cdots,\varepsilon_n)$，$1\leqslant t\leqslant k$，则 $\dim M_t=n-i_t+1$，且 $M_1\supset\cdots\supset M_k$. 对于维数为 i_t 的任意子空间 $L_t(t=1,\cdots,k)$，由引理 1 知分别存在广义标准正交的 $u_t\in L_t$ 和 $v_t\in M_t$ 有 $\mathscr{L}(u_1,\cdots,u_k)=\mathscr{L}(v_1,\cdots,v_k)$. 作矩阵 $u=(u_1,\cdots,u_k)'$和矩阵 $V=(v_1,\cdots,v_k)'$，则 $U=WV$，且 W 是广义酉矩阵. 由文献[9, § 1, Th2]，$\sum\limits_{t=1}^{k}U_tA\overline{u}_t'=\mathrm{tr}UA\overline{u}'=\mathrm{tr}WVA\overline{V}'\overline{W}'=\mathrm{tr}VA\overline{V}'=\sum\limits_{t=1}^{k}v_tA\overline{v}_t'$. 又对于 $1\leqslant t\leqslant k$，$v_tA\overline{v}_t'\leqslant\lambda_{i_t}(A)$，故 $\sum\limits_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A)\geqslant\sum\limits_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'\geqslant\min\limits_{\substack{u_t\in L_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta_{st}}}\sum\limits_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'$. 另一方

面，取 $L_t=\mathscr{L}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{i_t})$，$1\leqslant t\leqslant k$，则 $\dim L_t=i_t$. $\forall\ u_t\in L_t$ 且 $u_t\overline{u}_t'=1\ (t=1,\cdots,k)$，则 $\lambda_{i_t}(A)\leqslant u_tA\overline{u}_t'$. 所以 $\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A)\leqslant\sum_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'$. 从而 $\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A)\leqslant\min\limits_{\substack{u_t\in L_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta_{st}}}\sum_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'\leqslant\max\limits_{\dim L_t=i_t}\min\limits_{\substack{u_t\in L_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta_{st}}}\sum_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'$. 至此完成了定理的证明.

注 定理 1 是 Wielandt 在复矩阵里的结果减少了条件 $L_1\subset\cdots\subset L_k$ 后在四元数体上的推广.

定理 2 设 A_1,A_2 是 n 阶四元数自共轭矩阵，则对于任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$\sum_{j=1}^{k}\lambda_{n-j+1}(A_2)+\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1)\leqslant\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1+A_2)\leqslant\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A).$$

证明 先证右边的不等式. 由定理 1 有

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1+A_2)=\max_{\dim L_t=i_t}\min_{\substack{u_t\in L_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta_{st}}}\sum_{t=1}^{k}u_t(A_1+A_2)\overline{u}_t'.$$

假定上面的等式右端达到最大值的子空间是 $\hat{L}_t(t=1,\cdots,k)$，则由定理 1 的证明的前一部分论述知存在广义标准正交的 $v_t\in\hat{L}_t$ 使得 $\sum_{t=1}^{k}v_tA_1\overline{v}_t'\leqslant\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1)$. 而由文献[4, § 2,Th2. 1]，有 $\sum_{t=1}^{k}v_tA_2\overline{v}_t'\leqslant\sum_{t=1}^{k}\lambda_t(A_2)$. 因此

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1+A_2)=\min_{\substack{u_t\in\hat{L}_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta_{st}}}\sum_{t=1}^{k}u_t(A_1+A_2)\overline{u}_t'\leqslant\sum_{t=1}^{k}v_t(A_1+A_2)\overline{v}_t'\leqslant\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A_1)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A_2).$$

其次证左边不等式. 由已证不等式，注意到 $A_1=(A_1+A_2)+(-A_2)$ 及 $\lambda_j(-A_2)=-\lambda_{n-j+1}(A_2)$ 即得左边不等式.

定理 3 设 A_1,A_2 是两个 $n\times m$ 四元数矩阵，则对于任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(A_1+A_2)\leqslant\sum_{t=1}^{k}\sigma_{i_t}(A_1)+\sum_{j=1}^{k}\sigma_j(A_2).$$

证明 由引理 2，从定理 2 直接得到.

定理 4 设 A_1,A_2 是两个 $n\times m$ 四元数矩阵，则对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\max_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{t=1}^{k}|\sigma_{i_t}(A_1)-\sigma_{i_t}(A_2)|\leqslant\sum_{j=1}^{k}\sigma_j(A_1-A_2).$$

证明 由定理 2，对于 $1\leqslant k\leqslant n$ 有 $\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\hat{A}_1)\leqslant\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(\hat{A}_2)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\hat{A}_1-\hat{A}_2)$. 于是

$$\max_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{t=1}^{k}(\sigma_{i_t}(\hat{A}_1)-\sigma_{i_t}(\hat{A}_2))\leqslant\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(A_1-A_2).$$

再由 $\sigma(A_1-A_2)=\sigma(A_2-A_1)$ 即得定理结论.

定理 5[4, § 2,Th2. 1] 设 A 是 n 阶四元数自共轭矩阵，则 $d(A)\prec\lambda(A)$，其中 $d(A)$ 是 A 的主对角元向量，$\lambda(A)$ 是 A 的特征值向量.

定理 6[1] 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是四元数体上可中心化矩阵，则

$$\|A\|\leqslant\sqrt{\prod_{i=1}^{n}(a_{i1}\overline{a}_{i1}+\cdots+a_{in}\overline{a}_{in})}.$$

证明 由定理 5 及引理 3，有 $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(A\overline{A}')\leqslant\prod_{i=1}^{n}d_i(A\overline{A}')$，其中 $d_i(A\overline{A}')$ 是 $A\overline{A}'$ 的第 i 个主对角元，又由文献[5，§3]及文献[1，L3]，$\prod_{i=1}^{n}\lambda_i(A\overline{A}')=\|A\overline{A}'\|=\|A\|^2$，即得定理.

定理 7 设 A 是 n 阶四元数矩阵，则 $|d(A)|\prec_w\sigma(A)$，其中 $|d(A)|$ 是由 A 的主对角元取模而得的向量，$\sigma(A)$ 是 A 的奇异值向量.

证明 无妨假定 $|d(A)|$ 的分量是依照递减的次序排列的. 设 $A=UA_{\sigma}V$ 是矩阵 A 的奇异值分解，则 $|a_{ii}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)|u_{ij}||v_{ji}|$，所以 $\sum_{i=1}^{k}|a_{ii}|\leqslant\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)\sum_{i=1}^{k}|u_{ij}||v_{ji}|$. 然而对于 $1\leqslant l\leqslant n$ 有

$$\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}|u_{ij}||v_{ji}|\leqslant\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}(|u_{ij}|^2+|v_{ji}|^2)\leqslant\min(k,l),$$

由引理 4 即得定理.

注 定理 7 对讨论四元数矩阵乘积的奇异值不等式有用.

参 考 文 献

[1] 谢邦杰，中国科学，数学专辑(Ⅰ)(1979)，88—93.

[2] 庄瓦金，数学进展，4(1988)，403—407.

[3] Cao Chongguang, J. Math. Research and Exposition, Vol. 10, No. 1(1990), 19—22.

[4] 刘建洲，数学学报，6(1992)，831—838.

[5] 谢邦杰，吉林大学自然科学学报，3(1980)，1—33.

[6] H. Wielandt, Proc. Amer. Math. Soc., 6(1955), 106—110.

[7] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[8] 谢邦杰，抽象代数学，上海科学技术出版社，1982.

[9] 屠伯埙，数学年刊(A 辑)，2(1988)，130—138.

Inequalities for Eigenvalues of Sum of Quaternion Self-conjugate Matrices

Tao Yuegang

(Dept. of Math., Hubei College of Education, Wuhan 430060)

Abstract

This paper proves the following theorem: Let $A=(a_{ij})_{n\times n}$ be the self-conjugate matrix of quaternion, $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, then

$$\sum_{t=1}^{k}\lambda_{i_t}(A)=\max_{\dim L_t=i_t}\min_{\substack{u_t\in L_t\\ u_s\overline{u}_t'=\delta}}\sum_{t=1}^{k}u_tA\overline{u}_t'$$

This is an extension of one of Wielandt's results over skew field of quaternions.

Keywords quaternion matrix, eigenvalue, inequality.