第15卷 增刊 1995年11月
数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION
Vol. 15 Supp Nov. 1995

四元数可中心化矩阵谱值的不等式*

刘 建 洲

(湘潭大学数学系，湖南 411105)

摘 要 本文给出了四元数可中心化矩阵谱值模的和的一个估计，推广了[1]、[2]的结果.

关键词 四元数可中心化矩阵，谱值，奇异值.

分类号 AMS(1991) 15A18,15A33/CCL O151.21

用 Q,C,R 分别表示实四元数体，复数域和实数域；$Q^{m\times n}$表示 $m\times n$ 阶四元数矩阵集；$R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵集. 若 $q\in Q$，用 $\|q\|=\sqrt{q\bar{q}}$表示 q 的模. 若 $A\in Q^{m\times n}$，以下总设 A 的奇异值按大小顺序排为 $\sigma_1(A)\geqslant\sigma_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_{\min(m,n)}(A)$.

作者在[1]中证明：设 $A,B\in Q^{n\times n}$，$\lambda(AB)$是 AB 的任一左(右)特征值[3]，则

$$\|\lambda(AB)\|\leqslant\sigma_1(A)\sigma_1(B).$$

文[2]则在要求 AB 是可中心化矩阵时，证明了对 AB 的任一特征值 $\lambda(AB)$有同样结果；但仔细分析[2]中定理 5 的证明，认为[2]中只对满足"$(AB)P_1=P_1\lambda_{i_1}$"的这种 λ_{i_1}(亦即 AB 的右(左)特征值)进行了证明. 而对 AB 任一特征值情况并未给出估计. 本文在 AB 是可中心化矩阵时，给出了更好的结论.

引理 1[3] 设 $A\in Q^{n\times n}$是可中心化矩阵，则存在广义酉矩阵 U，使

$$UAU^*=\begin{pmatrix}\lambda_1(A) & & & \\ & \lambda_2(A) & & * \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n(A)\end{pmatrix}.$$

文[3]把引理 1 中的 $\lambda_1(A),\lambda_2(A),\cdots,\lambda_n(A)$称为 A 的一组谱值，它们都属于 Q 的中心域 R 的代数封闭扩域 C 中，而 C 同构于 Q 的子域 $Q_1=\{a+bi\,|\,a,b\in R\}$，故无妨认为 $C=Q_1$，即将每个复数 $a+bi$ 也看作一个四元数 $a+bi$，这里的符号 i 有双重意义，但不会引起混淆. 以下总设 $\|\lambda_{[1]}(A)\|\geqslant\|\lambda_{[2]}(A)\|\geqslant\cdots\geqslant\|\lambda_{[n]}(A)\|$.

引理 2[4] 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\in R^{n\times 1}$，且 $x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0,y_1\geqslant y_2\geqslant\cdots\geqslant y_n\geqslant 0$，若 P 是任一次双随机矩阵，则

$$x^TPy\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

* 1993年3月2日收到.

引理 3 设 $A=(a_{ij})\in Q^{n\times n}$，且主对角线上元素按模的大小顺序排为 $\|a_{[11]}\|\geqslant\|a_{[22]}\|\geqslant\cdots\geqslant\|a_{[nn]}\|$，则对任意自然数 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\sum_{i=1}^{k}\|a_{[ii]}\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A).$$

证明 存在置换矩阵(也是一个广义酉矩阵)W 使

$$WAW^*=\begin{pmatrix}a_{[11]} & & & \\ & a_{[22]} & & * \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{[nn]}\end{pmatrix},$$

从而以下不妨就设 $\|a_{11}\|\geqslant\|a_{22}\|\geqslant\cdots\geqslant\|a_{nn}\|$.

设 A 的奇异值分解为 $A=UD_\sigma V^*$，其中 $U=(u_{ij}),V=(v_{ij})$是 n 阶广义酉矩阵，$D_\sigma=\mathrm{diag}(\sigma_1(A),\sigma_2(A),\cdots,\sigma_n(A))$. 设 $P=(\|u_{ij}\bar{v}_{ij}\|=(p_{ij})$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}p_{ij}&=\sum_{i=1}^{n}\|u_{ij}\bar{v}_{ij}\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\|u_{ij}\|^2+\|v_{ij}\|^2)\\&=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}u_{ij}\bar{u}_{ij}+\sum_{i=1}^{n}v_{ij}\bar{v}_{ij})=\frac{1}{2}(1+1)=1;\end{aligned}$$

同样 $\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\leqslant 1$，即 P 是次双随机矩阵.

对 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$a_{ii}=\sum_{j=1}^{n}u_{ij}\sigma_j(A)\bar{v}_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)u_{ij}\bar{v}_{ij},$$

从而由引理 2 有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\|a_{ii}\|&=\sum_{i=1}^{k}\|\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)u_{ij}\bar{v}_{ij}\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)\|u_{ij}\bar{v}_{ij}\|=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\sigma_j(A)p_{ij}\\&=(\sigma_1(A),\sigma_2(A),\cdots,\sigma_n(A))P^T(\underbrace{1,\cdots,1}_{k\uparrow},0,\cdots,0)^T\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A).\end{aligned}$$

引理 4[3] 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，则对任意自然数 $1\leqslant k\leqslant n$，有

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(AB)\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

定理 设 $A,B\in Q^{n\times n}$，且 AB 是可中心化矩阵，$\lambda_1(AB),\lambda_2(AB),\cdots,\lambda_n(AB)$是 AB 的一组谱值，则对任意自然数 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}\|\lambda_{[i]}\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}\sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

证明 由引理 1 知，存在广义酉矩阵 U 使

$$UABU^*=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1}(AB) & & & \\ & \lambda_{i_2}(AB) & & * \\ & & \ddots & \\ * & & & a_{i_n}(AB)\end{pmatrix},$$

其中 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一种排列. 从而由引理 3, 引理 4 有

$$\sum_{i=1}^{k} \| \lambda_{[i]}(AB) \| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(UABU^*) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(AB) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \sigma_i(A)\sigma_i(B).$$

此定理显然推广了[1], [2]的结果.

用数学归纳法易得:

推论 1 设 $A_j \in Q^{n\times n}(j=1,2,\cdots,m)$, 且 $\prod_{j=1}^{m} A_j$ 是可中心化矩阵, $\lambda_1(\prod_{j=1}^{m} A_j), \lambda_2(\prod_{j=1}^{m} A_j), \cdots, \lambda_n(\prod_{j=1}^{m} A_j)$ 是 $\prod_{j=1}^{m} A_j$ 的一组谱值, 则对任意自然数 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$\sum_{i=1}^{k} \| \lambda_{[i]}(\prod_{j=1}^{m} A_j) \| \leqslant \sum_{i=1}^{k} \prod_{j=1}^{m} \sigma_i(A_j).$$

推论 2 设 $A, B \in Q^{n\times n}$ 是自共轭矩阵, 且 A 是正定(或半正定)的, 则对任意自然数 $1\leqslant k \leqslant n$ 有

$$\sum_{i=1}^{k} \| \lambda_{[i]}(AB) | \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(A) | \lambda_{[i]}(B) |.$$

证明 注意到 AB 的谱值即为其特征值[3], 且为实数, 又 $\lambda_i(A) = \sigma_i(A)$, $|\lambda_{[i]}(B)| = \sigma_i(B)$, 立得结论.

参 考 文 献

[1] 刘建洲、谢清明, 四元数自共轭矩阵乘积的特征值不等式, 数学研究与评论, 3(1992), 379—384.

[2] 黄礼平, 四元数矩阵的特征值与奇异值估计, 数学研究与评论, 3(1992), 449—454.

[3] 屠伯埙, Schur 定理在四元数体上的推广, 数学年刊(A 辑), 2(1988), 130—138.

[4] A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Academic Press, New York, 1979.

[5] 刘建洲, 四元数体上的矩阵及其优化理论, 数学学报, 6(1992), 831—838.