关于DQ_rC-环*

都 本 芳

(大连大学师范学院，116033)

摘 要 本文引进了DQ_rC-环. 给出了DQ_rC-环的Köthe根等于它的所有质理想交；右Noether DQ_rC-环每个理想皆可分解为有限个不可缩短右准质理想交；在稍强条件下，给出了Krull交定理在右Noether DQ_rC-环上的推广.

关键词 DQ_rC-环，Köthe根，准质分解.

分类号 AMS(1991) 16S70/CCL O153.3

文中总设R为结合环.

文[1]中引进了DQC-环. 所谓DQC-环，就是该环每个理想I均由$I\cap Q$生成，其中Q为拟中心[1]($Q=\{r\in R\mid rR\doteq Rr\}$).

定义1 集合Q_r称为环R的右拟中心，如果$Q_r=\{r\in R\mid Rr\subseteq rR\}$.

定义2 一个环R称为DQ_rC-环，如果R每个非零理想I均由$I\cap Q_r$生成.

显然交换环，DQC-环均为DQ_rC-环. 下例表明有的DQ_rC－不是DQC-环.

例 设R是数域F上以$B=\{a,b,c,j\}$为基向量空间. 基元素间乘法定义为：$ax=xa$，$\forall x\in B$；$b^2=cb=j$，$c^2=bc=bj=jb=cj=jc=j^2=0$. 易见$(xy)z=x(yz)$，$\forall x,y,z\in B$. 再按分配律以及$\alpha(xy)=x(\alpha y)$，$\forall x,y\in B$，$\forall \alpha\in F$定义R中元素乘法. 不难验证R是DQ_rC-环，但不是DQC-环.

对于DQ_rC-环，有如下

命题1 设R为DQ_rC-环，则P为R的质理想充分必要条件是具有性质：

(1) "当$a,b\in Q_r$，$ab\in P$时，就有$a\in P$或$b\in P$."

证明 必要性由Q_r定义直接推出.

充分性 用反证法，假设R有理想A,B使$AB\subseteq P$但$A\not\subseteq P$，$B\not\subseteq P$，则由$a\in A\cap Q_r$，$b\in B\cap Q_r$使$a\bar{\in} P$，$b\bar{\in} P$. 于是由性质(1)知$ab\bar{\in} P$，但另一方面却有$ab\in aB\subseteq AB\subseteq P$. 矛盾.

设A为R理想，环$\overline{R}=R/A$ Köthe根记为$\sqrt{A}$. 特别$\sqrt{(0)}$为R Köthe根.

称R理想A为右准质的. 如果$BC\subseteq A$，$C\not\subseteq A$，则$B\not\subseteq\sqrt{A}$. 此处B,C为R理想. 类似可定义左准质理想. 而当A即左准质为右准质时，则称A为准质理想. 若R的零理想为(左，右)准质理想，则称R为(左，右)准质环.

命题2 DQ_rC-环R的理想A为右准质理想充分必要条件是具有性质：

* 1993年7月3日收到.

(2) "$b, c \in Q_r, bc \in A, c \bar{\in} A$ 时则有 $b \in \sqrt{A}$."

证明 必要性由 Q_r 定义直接推出.

充分性 设 B, C 为 R 两个理想,且满足 $BC \subseteq A, C \not\subseteq A$,则存在 $c \in C \cap Q_r$ 使 $c \bar{\in} A$,但 $BC \subseteq A$,所以 $\forall\, b \in B \cap Q_r$,有 $bc \in A$,由(2)知 $b \in \sqrt{A}$,从而 $B \subseteq \sqrt{A}$.

命题 3 设 P 为 DQ$_r$C-环 R 质理想,$A \subseteq P$ 为 R 理想,则 $\sqrt{A} \subseteq P$,特别地 $P = \sqrt{P}$.

证明 $\forall\, a \in \sqrt{A} \cap Q_r$,则存在自然数 n 使 $a^n \in A \subseteq P$. 由 P 为质的,满足性质(1)知 $a \in P$,从而 $\sqrt{A} \subseteq P$. 至于 $P = \sqrt{P}$ 由 $P \subseteq \sqrt{P}$ 直接得出.

由命题 3 可直接推出

命题 4 设 P 为 DQ$_r$C-环 R 质理想,则 R/P 为 Köthe 半单纯环.

由上述命题及文[2]中定理 9.2.2 有

定理 1 DQ_rC-环 Köthe 根等于它的所有质理想交.

Noether 环的 Baer F 根是一幂零理想,所以

命题 5 设 R 为右 Nother DQ$_r$C-环则 R 的诣零理想 A 必为幂零的.

推论 设 q 为右 Noether DQ$_r$C-环 R 的右准质理想. 对 R 的任意理想 A, B,当 $AB \subseteq q, B \subseteq q$ 时必有 $A^m \subseteq q$,m 为正整数.

证明 令 $\bar{R} = R/q$,则 $\bar{R}$ 为右准质环. 由 $AB \subseteq q, B \not\subseteq q$ 有 $\overline{AB} = (\bar{0}), \bar{B} \neq (\bar{0})$ 从而 $\bar{A} \subseteq \sqrt{(\bar{0})}$. 由命题 5,$\sqrt{(\bar{0})}$ 为幂零的. 于是存在自然数 m 使 $\bar{A}^m = (\bar{o})$,故 $A^m \subseteq q$.

设 q_1, q_2 均为 R 的右准质理想,且 $\sqrt{q_1} = \sqrt{q_2}$,则容易证明 $q = q_1 \cap q_2$ 也是 R 的右准质理想,同时 $\sqrt{q_1} = \sqrt{q_2} = \sqrt{q}$. 称环 R 理想 A 为不可分解的,如果 $A = X \cap Y$ 则 $X = A$ 或 $Y = A$. 其中 X, Y 均为 R 理想.

用 DQ$_r$C-环定义和类似文[3]方法可以证明

引理 1 设 R 为 DQ$_r$C-环,q 为 R 的右准质理想,则 $\sqrt{q}$ 为 R 的质理想.

引理 2 右 Noether DQ$_r$C-环 R 中不可分解理想恒为右准质的.

引理 3 右 Noether DQ$_r$C-环 R 中每个理想均是有限个不可分解理想交.

由上述引理,利用交换 Noether 环方法可证

定理 2 在右 Noether DQ$_r$C-环 R 中任理想 A 替可分解为有限个不可缩短的右准质理想交 $A = q_1 \cap \cdots \cap q_n$. 如果又有不可缩短右准质分解 $A = q'_1 \cap \cdots \cap q'_m$. 则必有 $n = m$,且适当调整诸 q'_i 次序,有

$$\sqrt{q_i} = \sqrt{q'_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

系 右 Noether DQ$_r$C-环 R 中理想 A 有右准质分解

$$A = q_1 \cap \cdots \cap q_n = q'_1 \cap \cdots \cap q'_n.$$

若 $q_{i_1}, \cdots, q_{i_k}$ 之根 $\sqrt{q_{i_1}}, \cdots, \sqrt{q_{i_k}}$ 不含其他 $\sqrt{q_i}$,则称 $B = q_{i_1} \cap \cdots \cap q_{i_k}$ 为 A 的一个孤立分量;如果 $\sqrt{q_{i_1}}, \cdots, \sqrt{q_{i_k}}$ 相应于 $q'_{i_1}, \cdots, q'_{i_k}$,记 $B' = q'_{i_1} \cap \cdots \cap q'_{i_k}$ 则有

$$B = B'.$$

定理 3 设 R 为有 1 的右 Noether DQ_rC-环，且 R 任何非零理想均含有非零拟中心元素，如果 R 为右准质环，则对 R 任何一个真理想 A 均有

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A^n = (0).$$

证明 用反证法，假设 $I=\bigcap_{n=1}^{\infty} A^n \neq (0)$. 则 I 含有非零拟中心元素 t，由定理 2 有

$$ARt = q_1 \cap q_2 \cap \cdots \cap q_s,$$

这里 q_i 均为右准质理想. 则对于每个 q_i，或者 $Rt \subseteq q_i$ 或者 $Rt \nsubseteq q_i$ 时有 $A^m \subseteq q_i$（命题 5 推论），当 $A^m \subseteq q_i$ 时，有 $I \subseteq A^m \subseteq q_i$，从而 $t \in I \subseteq q_i$，$Rt \subseteq q_i$，总之，不论哪种情况总有 $Rt \subseteq q_i$，$i=1,2,\cdots,s$. 于是 $Rt \subseteq q_1 \cap \cdots \cap q_s = ARt \subseteq Rt$. 故 $Rt = ARt \subseteq At$，于是存在 $a \in A$，使得 $t = at$，$(1-a)t = 0$. 令 $B = R(1-a)R$，$c = Rt$，因 $1 \in R$，故 $1-a \in R(1-a)R$，从而 $BC = R(1-a)R \cdot Rt \subseteq R(1-a)tR = (0)$. 但 $c \neq (0)$. 故存在自然数 n 使 $B^n = (0)$，从而 $(1-a)^n = 0$. 展开有 $1 = C_n^1 a - C_n^2 a^2 + \cdots + (-1)^{n-1} C_n^n a^n \in A$，此与 A 为真理想矛盾，故必有 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A^n = (0)$.

不难看出，定理 1,2,3 对于 DQC-环仍然成立.

参 考 文 献

[1] W. Burgess and M. Chacron, *Subdirectly irreducible DQC rings*, Canad. Math. Bull., 14(4) (1971), 495—498.

[2] 刘绍学，环与代数，科学出版社，1986.

[3] 樊复生，关于右双环，吉林大学学报，2(1983)，1—12.

[4] G. Thierrin, *On duo ring*, Can Math Bull, 3(1960), 167—172.

On Problems of $DQ_r'C$ Rings

Du Benfang

(Dalian University, 116035)

Abstract

We give the definition of DQ_rC ring, and prove that the nil-radical of R may be intersection of all the primary ideals.

For a right Noether DQ_rC ring R , any nonideal of R may be decomposed into intersection of primary ideals of non-separated and generalize the Krull intersection theorem to the right Noether DQ_rC ring.

Keywords DQ_rC ring, nil-radical, primary decompostion.