一类奇异积分的计算方法*

赵 洪 凯
(天津医学院生物医学工程系，天津 300070)

关键词 奇异积分，Cauchy 定理，Jordan 引理.
分类号 AMS(1991) 30E20/CCL O174.5

§1 引 言

本文论述下列类型积分的一般计算方法

$$I(m,p,n)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^m x\cdot\cos^p x}{x^n}dx,$$

这里，m,n,p 皆为非负整数，且 $m\geq n>0$，并设 m,n 同为奇数或偶数. 当 $p=0,m=n=1,2,4$ 时，即分别为熟知的 Dirichlet 积分，Fejer 积分和 Dickson 奇异积分，它们在富氏分析与函数逼近论中均有重要应用，就一般情形 $I(m,p,n)$ 的计算，文献中尚未见到(参看[4]).

上述积分应用复分析方法可变形为回路积分，然后适当地运用 Jordan 引理和 Cauchy 留数定理即可求出其计算公式.

§2 $I(n,0,n)$ 的计算公式

先把积分变形，显然有：

$$I(n,0,n)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^n}dx=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{n-1}x}{x^n}e^{ix}dx. \tag{1}$$

采取逆时针方向的封闭回路 $L=[-R,-\varepsilon]\cup C_\varepsilon\cup[\varepsilon,R]\cup C_R$，它由绕原点的小半圆 C_ε，绕原点的大半圆 C_R 和实轴上从 $-R$ 到 $-\varepsilon$ 及从 ε 到 R 的两个闭区间组成.

在 L 所围的闭区域上，函数 $\frac{\sin^{n-1}z}{z^n}e^{iz}$ 显然为解析函数，故有

$$\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{\sin^{n-1}x}{x^n}e^{ix}dx+\left(\int_{C_\varepsilon}+\int_{C_R}\right)\frac{\sin^{n-1}z}{z^n}e^{iz}dz=0. \tag{2}$$

在(2)式中，

$$\int_{C_R}\frac{\sin^{n-1}z}{z^n}e^{iz}dz=\int_{C_R}\frac{\left[\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\right]^{n-1}}{z^n}e^{iz}dz$$

* 1995年4月14日收到.

$$= \frac{1}{2i^{(n-1)}}\int_{C_R} \frac{C_0^{n-1}e^{inz} - C_1^{n-1}e^{i(n-2)z} + \cdots + (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}e^{-i(n-2)z}}{z^n}dz. \tag{3}$$

以下为了方便，将区分 n 为奇数或偶数的情况，即

$$n = 2k + 1 \text{ 或 } n = 2k + 2, (k = 0,1,2,\cdots). \tag{4}$$

并按照(4)式，上奇下偶，将(3)式对应写成：

$$\int_{C_R} \frac{\sin^{n-1}x}{z^{n-1}}e^{iz}dz = \begin{cases} \dfrac{1}{(2i)^{2k}}\displaystyle\int_{C_R}\left(\sum_{j=0}^{2k}(-1)^jC_j^{2k}e^{i(2k+1-2j)z}/z^{2k+1}\right)dz, \\ \dfrac{1}{(2i)^{2k+1}}\displaystyle\int_{C_R}\left(\sum_{j=0}^{2k+1}(-1)^jC_j^{2k+1}e^{i(2k+2-2j)z}/z^{2k+2}\right)dz. \end{cases} \tag{5}$$

为简化(5)式，可利用下面一易知的结果作为引理

引理

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^{2k}} = 0 \quad \text{当 } k \geqslant 1. \tag{6}$$

于是由一系列解析计算，可得下列积分值(取主值积分)：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{n-1}x}{x^n}e^{ix}dx$$

$$= \pi i + 2\pi i\begin{cases} \dfrac{1}{(2i)^{2k}}\left[(-1)^kC_{k+1}^{2k}\left(\operatorname{Res}\dfrac{e^{iz}}{z^{2k+1}}\right)_0 + \cdots + (-1)^{2k-1}C_{2k}^{2k}\left(\operatorname{Res}\dfrac{e^{i(2k-1)z}}{z^{2k+1}}\right)_0\right], \\ \dfrac{1}{(2i)^{2k+1}}\left[(-1)^kC_{k+2}^{2k+1}\left(\operatorname{Res}\dfrac{e^{i2z}}{z^{2k+2}}\right)_0 + \cdots + (-1)^{2k-1}C_{2k+1}^{2k+1}\left(\operatorname{Res}\dfrac{e^{i2kz}}{z^{2k+2}}\right)_0\right]. \end{cases} \tag{7}$$

最后经过简化可最后得：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^n x}{x^n}dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi\begin{cases} \dfrac{1}{2^{2k}}\dfrac{1}{(2k)!}\left[(-1)^kC_{k+1}^{2k}1^{2k} + \cdots + (-1)^{2k-1}C_{2k}^{2k}(2k-1)^{2k}\right], \\ \dfrac{1}{2^{2k+1}}\dfrac{1}{(2k+1)!}\left[(-1)^kC_{k+2}^{2k}2^{2k+1} + \cdots + (-1)^{2k-1}C_{2k+1}^{2k+1}(2k)^{2k+1}\right]. \end{cases} \tag{8}$$

在(8)式中，令 $n=1,2,3$，即可得到已知的例子如下：

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx = \frac{3}{8}\pi,$$

§3 推广对 $I(m,p,n)$ 的积分法

上节所用的方法与所得结果，可推广应用于一类积分 $I(m,p,n)$. 不过要补充和注意利用以下易知的结果：

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{dz}{z^n} = \begin{cases} i\pi, & \text{当 } n = 1, \\ 0, & \text{当 } n > 1, \end{cases} \tag{9}$$

以及

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{\sin^{m-1}z\cos^p z}{z^n}e^{iz}dz = \begin{cases} 0 & \text{当 } m > n \text{ 时}, \\ -\pi i & \text{当 } m = n \text{ 时}. \end{cases}$$

现举一例，用上述方法可得到

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x\ \cos x}{x}dx=\frac{\pi}{16}.$$

参 考 文 献

[1] 郭敦仁，数学物理方法，人民教育出版社，1965.

[2] 梁昆淼. 数学物理方法，人民教育出版社，1978 年第二版.

[3] F. W. Byron, R. M. Fuller，物理学中的数学方法(中译本)，第二卷，科学出版社，1982.

[4] D. B. deHaan, *Nouvelles Tables D'inte'grales D'efinies*(英文译本中有 J. F. Ritt 的介绍)，Hafner 出版，New York, 1957.

An evaluation of a class of singular integrals

Zhao Hongkai

(Department of Biomedical Engineering, Tianjin Medical College, Tianjin 300070)

Abstract

By means of residues and special integral loops, we give a general evaluation of the following kind of singular integrals:

$$I(m,p,n)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^m x\cos^p x}{x^n}dx,$$

where m,n,p are all non-negative integers, $m\geqslant n>0$, and m,n are simultaneously odd or even.

Keywords singular integral, cauchy theorem, Jordan's lemma.