

广义 ω -Calderón-Zygmund 算子的有界性*

赵 凯

(青岛大学数学系, 266071)

摘 要 本文证明了广义 ω -Calderón-Zygmund 算子是 HA^p_ω 到 HA^p 的有界算子.

关键词 广义 ω -Calderón-Zygmund 算子, HA^p_ω 空间, HA^p 空间.

分类号 AMS(1991) 42B20/CCL O174.2

§ 1 引言与结果

这里指的广义 ω -Calderón-Zygmund 算子是如下的算子:

定义 A 若 $K(x, y)$ 是满足下面条件的标准核:

(1) $|K(x, y)| \leq c\omega_{|x-y|}(x)|x-y|^{-n}$;

(2) 当 $|x-y| > 2|x-x'|$ 时, 有

$$|K(x, y) - K(x', y)| + |K(y, x) - K(y, x')| \leq c\omega_{|x-x'|}(x)|x-y|^{-n}\theta\left(\frac{|x-x'|}{|x-y|}\right),$$

其中 $\omega \in A_1$ (Muckenhoupt 类)

$\omega_t(x) = t^{-n} \int_{|x-y| \leq t} \omega(y) dy$. $\theta(t)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非减函数, $\theta(0) = 0$, $\theta(2t) \leq c\theta(t)$, 且 $\int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt < +\infty$, 如果 T 是对应于核 $K(x, y)$ 的 $L^2(\omega^2) \rightarrow L^2$ 的有界算子, 则称 T 是广义 ω -Calderón-Zygmund 算子.

在[1]中得到了广义 ω -Calderón-Zygmund 算子的 $L^p(\omega^p) \rightarrow L^p$ ($1 < p < \infty$) 有界性. 在这里我们考虑它在 HA^p 空间的有界性问题. 先看看 $HA^p_\omega(R^n)$ 和 $HA^p(R^n)$ 的定义:

定义 B^[2] $HA^p_\omega(R^n) = \{f \in L^1(R^n): f(x) = \sum_k \lambda_k a_k(x), \text{ 其中每一 } a_k \text{ 为一加权中心}(1, p) \text{ 原子}, \sum_k |\lambda_k| < +\infty\}$

定义 C^[3] $HA^p(R^n) = \{f \in L^1(R^n): f = \sum_k \mu_k b_k(x), \text{ 其中每一 } b_k \text{ 为中心}(1, p) \text{ 原子}, \sum_k |\mu_k| < +\infty\}$.

上面的加权中心 $(1, p)$ 原子和中心 $(1, p)$ 原子分别定义为^{[2], [3]} ($1 < p < +\infty$): 若函数 $a(x)$, $x \in R^n$ 满足: (1) $\text{supp } a \subset B(0, r)$, $r \geq 1$; (2) $\|a\|_{p, \omega} \leq \omega(B(0, r))^{\frac{1}{p}-1}$; (3)

* 1992年9月6日收到.

$\int a(x)dx = 0$, 则称 $a(x)$ 为一加权中心 $(1, p)$ 原子; 若函数 $b(x), x \in R^n$ 满足: (a) $\text{supp} b \subset B(0, r), r \geq 1$; (b) $\|b\|_p \leq |B|^{\frac{1}{p}-1}$; (c) $\int b(x)dx = 0$, 则称 $b(x)$ 为一中心 $(1, p)$ 原子.

在这里, 得到下面的结果:

定理 设 T 是广义 ω -Calderón-Zygmund 算子, 且有 $T^*(1) = 0$ (T^* 是 T 的对偶), 则 T 是 HA_p' 到 HA_p' 的有界算子 ($1 < p < +\infty$).

§ 2 定理的证明

首先看下面的引理:

引理 设 T 是广义 ω -Calderón-Zygmund 算子, 且 $T^*(1) = 0$, 若 $a(x)$ 为任一加权中心 $(1, p)$ 原子, 则 $Ta(x) = \sum_{k \in N} \mu_k(a) b_k(x, a)$, 其中每个 $b_k(x, a)$ 是一中心 $(1, p)$ 原子, 且有

$$|\mu_k(a)| \leq c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right).$$

证明 记 $E_k = \{x \in R^n : 2^{k-1}r < |x| \leq 2^k r\}$, $B_k = \{x \in R^n : |x| \leq 2^k r\}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. 这样可设有

$$Ta(x) = \chi_{B_1}(x)Ta(x) + \sum_{k=2}^{\infty} \chi_{E_k}(x)Ta(x) \triangleq \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x).$$

从而当 $k \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} \|b_k\|_p &\leq \left(\int_{E_k} |Ta(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{E_k} \left| \int_B (k(x, t) - k(x, 0))a(t) dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c \left(\int_{E_k} \left(\int_B \omega_{|t|}(t) |x - t|^{-n} \theta\left(\frac{|t|}{|x - t|}\right) |a(t)| |dt|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\ &\leq c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot (2^k r)^{-n} \left(\int_{E_k} \left(\int_B |a(t)| \omega(t) dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot |B_k|^{-1} \cdot \|a\|_{p, \omega(B)}^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_k} dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot |B_k|^{-1} \cdot |B_k|^{\frac{1}{p}} = c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot |B_k|^{\frac{1}{p}-1}. \end{aligned}$$

令 $\mu_k(r) = c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right)$, $a_k(x) = b_k(x)/\mu_k(r)$, 则 $\text{supp} a_k \subset B_k$, $\|a_k\|_p \leq |B_k|^{\frac{1}{p}-1}$.

当 $k=1$ 时, 由于 T 是 $L^p(\omega^p) \rightarrow L^p$ ($1 < p < \infty$) 有界的^[1], 则

$$\begin{aligned} \|b_1\|_p &\leq \|Ta\|_p \leq c\|a\|_{p, \omega} = c \left(\int_B |a|^p \omega^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c\|a\|_{p, \omega} \cdot |B|^{\frac{1}{p}-1} \omega(B)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq c|B|^{\frac{1}{p}-1} = c|B_1|^{\frac{1}{p}-1}. \end{aligned}$$

记 $\mu_1(r) = c$, $a_1(x) = b_1(x)/\mu_1(r)$, 则有 $\text{supp} a_1 \subset B_1$, $\|a_1\|_p \leq |B_1|^{\frac{1}{p}-1}$.

由上面的讨论, 现在记 $F_1 = B_1$, 而当 $k \geq 2$ 时, $F_k = E_k$.

把 $Ta(x) = \sum_k b_k$ 写成:

$$\begin{aligned} Ta(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ b_k(x) - \frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|} \int b_k(t) dt \right\} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{F_j} b_j \right) \left(\frac{\chi_{F_{k+1}}(x)}{|F_{k+1}|} - \frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|} \right) + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \int_{F_j} b_j \right) \frac{\chi_{F_1}(x)}{|F_1|} \\ &\stackrel{\Delta}{=} \text{I} + \text{II} + \text{III}. \end{aligned}$$

因为

$$\text{I} = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\tau) \left\{ a_k(x) - \frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|} \int a_k \right\} \stackrel{\Delta}{=} 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k(\tau) \bar{a}_k(x).$$

则显然有 $\text{supp } \bar{a}_k \subset B_k$, $\int \bar{a}_k(x) dx = 0$, 且 $\|\bar{a}_k\|_p \leq \|a_k\|_p \leq |B_k|^{\frac{1}{p}-1}$, $k=1, 2, 3, \dots$. 即每一 $\bar{a}_k$ 是一中心 $(1, p)$ 原子.

又 $|\mu_1(\tau)| \leq c$, $k \geq 2$ 时 $|\mu_k(\tau)| \leq c\theta(\frac{1}{2^k})$. 所以对于 I, 引理正确.

记

$$\text{I} \stackrel{\Delta}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{F_j} b_j \right) \cdot \bar{a}_k(x),$$

其中 $\bar{a}_k(x) = \frac{\chi_{F_{k+1}}(x)}{|F_{k+1}|} - \frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|}$. 则

$$\begin{aligned} \|\bar{a}_k\|_p &= \left(\int \left| \frac{\chi_{F_{k+1}}(x)}{|F_{k+1}|} - \frac{\chi_{F_k}(x)}{|F_k|} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq c |B_{k+1}|^{-1} \left(\int_{B_{k+1}} dx \right)^{\frac{1}{p}} = c |B_{k+1}|^{\frac{1}{p}-1}. \end{aligned}$$

显然也有 $\int \bar{a}_k(x) dx = 0$, $\text{supp } \bar{a}_k \subset B_{k+1}$. 即 $\bar{a}_k(x)$ 均为中心 $(1, p)$ 原子, $k=1, 2, 3, \dots$. 又

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} \left| \int_{F_j} b_j \right| &\leq c \sum_{j=k+1}^{\infty} \int_{B_j} |b_j| \leq c \sum_{j=k+1}^{\infty} \left(\int_{B_j} |b_j|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_{B_j} dx \right)^{1-\frac{1}{p}} \\ &\leq c \sum_{j=k+1}^{\infty} \|b_j\|_p \cdot |B_j|^{1-\frac{1}{p}} \leq c \sum_{j=k+1}^{\infty} \theta\left(\frac{1}{2^j}\right) \leq c\theta\left(\frac{1}{2^k}\right), \end{aligned}$$

因此, 对于 II, 引理也正确.

最后看 III, 因为 $T^*(1)=0$, 所以 $\sum_{j=1}^{\infty} \int_{F_j} b_j = \int Ta(x) dx = (Ta, 1) = (a, T^*1) = 0$. 从而

对于 III, 引理也正确. 证毕.

定理的证明 将证明: 对于 HA'_a 中的一个函数 $f(x)$, $Tf(x) \in HA'$.

设 $f(x) = \sum_k \lambda_k a_k(x)$, 其中每一 $a_k(x)$ 是一加权中心 $(1, p)$ 原子, 且 $\sum_k |\lambda_k| < \infty$. 由引理的结论知有

$$Tf(x) = \sum_k \sum_j c_{kj} b_{kj}(x),$$

其中每一 $b_{kj}(x)$ 为一中心 $(1, p)$ 原子, 且 $c_{kj} = \lambda_k \mu_j(a_k)$, 及 $|\mu_j(a_k)| \leq c\theta(\frac{1}{2^j})$. 从而

$$\begin{aligned}\sum_k \sum_j |c_{kj}| &= \sum_k \sum_j |\lambda_k| \cdot c\theta\left(\frac{1}{2^j}\right) \leq c\left(\sum_k |\lambda_k|\right) \cdot \left(\sum_j \theta\left(\frac{1}{2^j}\right)\right) \\ &\leq c \sum_j \theta\left(\frac{1}{2^j}\right) \leq c \int_0^1 \frac{\theta(t)}{t} dt < +\infty.\end{aligned}$$

因此, $Tf(x) \in HA^p(R^n)$.

参 考 文 献

- [1] 赵 凯, 广义 ω -Calderón-Zygmund 算子, 青岛大学学报(自), 4:1-2(1991), 50-53.
- [2] 陆善镇、杨大春, Calderón-Zygmund 算子在 Hardy 型空间 HA^p 上的有界性及其应用, 科学通报, 36:16(1991), 1209-1211.
- [3] Y. Z. Chen and K. S. Lau, *Some new classes of Hardy spaces*, J. Funct. Anal., 84(1989), 255-278.
- [4] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, 1970.

Boundedness of Generalized ω -Calderón-Zygmund Operators

Zhao Kai

(Dept. of Math., Qingdao University, 266071)

Abstract

We prove that the generalized ω -Calderón-Zygmund operators are bounded from HA_ω^p to HA^p .

Keywords generalized ω -Calderón-Zygmund operators, HA_ω^p, HA^p .