第15卷 增刊　　数学研究与评论　　Vol. 15 Supp
1995年11月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Nov. 1995

Sobolev 空间的实内插*

刘 岚 喆
(湖南长沙电力学院数学系，410077)

摘　要　本文求出了 Sobolev 空间 L_k^∞, BMO_k 与 L_k^p, $H_k^p(0<p<\infty)$ 之间的实内插空间.

关键词　Sobolev 空间，实内插.
分类号　AMS(1991) 42B30/CCL O174.2

文[1],[2],[3]讨论得到了 L^∞, BMO 与 L^p, $H^p(0<p<\infty)$ 之间的实内插空间，[4],[5]得到了 Sobolev 空间 L_k^1 与 L_k^∞ 等之间的实内插空间. 本文得到了 Sobolev 空间 L_k^∞, BMO_k 与 L_k^p, $H_k^p(0<p<\infty)$ 之间的实内插空间.

对拟赋范空间 A_0, A_1 和 $f\in A_0+A_1$，令

$$K(t,f;A_0,A_1)=\inf_{f=f_0+f_1}(\|f_0\|_{A_0}+t\|f_1\|_{A_1}),$$

$$\|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}=\left(\int_0^\infty[t^{-\theta}K(t,f;A_0,A_1)]^q\frac{dt}{t}\right)^{1/2},$$

其中 $0<\theta<1$, $0<q\leqslant\infty$，定义 A_0 与 A_1 之间的实内插空间为

$$(A_0,A_1)_{\theta,q}=\{f\in A_0+A_1:\|f\|_{(A_0,A_1)_{\theta,q}}<\infty\}.$$

对 Lorentz 空间 $L^{p,q}$，定义其 Sobolev 空间为

$$H_k^{p,q}=\{f\in H^{p,q}:D^\alpha f\in H^{p,q},|\alpha|\leqslant k\},k\text{ 为正整数},$$

$$\|f\|_{H_k^{p,q}}=\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha f\|_{H^{p,q}}.$$

本文得到如下结果：

定理 1　设 $0<p<\infty$, $0<\theta<1$, $0<q\leqslant\infty$, $p_0=\frac{p}{1-\theta}$，则 $(L_k^p,BMO_k)_{\theta,q}=(L_k^p,L_k^\infty)_{\theta,q}$.

定理 2　设 $0<p_1,p_2<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, $p_0=\frac{p_1}{1-\theta}$，则 $(L_k^{p_1,p_2},L_k^\infty)_{\theta,q}=(L_k^{p_1,p_2},BMO_k)_{\theta,q}=L_k^{p_0,q}$.

定理 3　设 $0<p\leqslant1$, $0<\theta<1$, $0<q\leqslant\infty$, $p_0=\frac{p}{1-\theta}$，则 $(H_k^p,L_k^\infty)=(H_k^p,BMO_k)_{\theta,q}=H_k^{p_0,q}$.

定理 4　设 $0<p_1,p_2<\infty$, $0<q\leqslant\infty$, $0<\theta<1$, $p_0=\frac{p_1}{1-\theta}$，则 $(H_k^{p_1,p_2},BMO_k)_{\theta,q}=(H_k^{p_1,p_2},L_k^\infty)_{\theta,q}=H_k^{p_0,q}$.

* 1992年1月23日收到. 95年9月15日收到修改稿.

为证明上述结果，利用下列引理.

引理 1 设 $0<p<\infty$，k 为正整数，则

$$c_1\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left[\int_0^{t^p}((D^\alpha f)^*(s))^p ds\right]^{1/p}\leqslant K(t,f;L_k^p,L_k^\infty)\leqslant c_2\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left[\int_0^{t^p}((D^\alpha f)^*(s))^p ds\right]^{1/p},$$

其中 f^* 表示 f 的非增重排函数.

引理 2 设 $f\in L_k^p+\mathrm{BMO}_k$，$0<r<p<\infty$，$f_r^{\#}(x)=\sup\limits_{x\in Q}\left[\inf\limits_c\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)-c|^r dy\right)^{1/r}\right]$，则

$$K(t,f;L_k^p,\mathrm{BMO}_k)\geqslant c\sum_{|\alpha|\leqslant k}\left[\int_0^{t^p}(((D^\alpha f)_r^{\#})^*(s))^p ds\right]^{1/p}.$$

注 定理 1 和 2 表明如果次线性算子 T 为从 $L_k^{p_1}$ 到 L_k^p 有界和 $L_k^{p_2}$ 到 L_k^∞ 或 BMO_k 有界的，则 T 为从 $L_k^{p_3,q}$ 到 $L_k^{p_0,q}$ 有界的，定理 3 和 4 表明如 T 为从 $H_k^{p_1}$ 到 L_k^p 有界和 $H_k^{p_2}$ 到 L_k^∞ 或 BMO_k 有界的，则 T 为从 $H_k^{p_3,q}$ 到 $H_k^{p_0,k}$ 有界的，其中 $0<p_1,p_2,q\leqslant\infty$，$0<p<\infty$，$0<\theta<1$，$\frac{1}{p_3}=\frac{1-\theta}{p_1}+\frac{\theta}{p_2}$，$p_0=\frac{p}{1-\theta}$.

参 考 文 献

[1] J. Bergh and J. Lofstrom, *Interpolation Spaces*, An introduction, Grundlehren Math. Wiss., 233, Springer, Berlin, 1976.

[2] C. Fefferman and N. M. Riviere, V. Sagher, *Interpolation between H^p spaces: the real method*, Trans. Amer. Math. Soc., 191(1972), 75—82.

[3] R. Hanks, *Interpolation by the real method between BMO, L^α and $H^\alpha(0<\alpha<\infty)$*. Indiana Univ. Math. J., 26(1977), 679—689.

[4] R. Devore and K. Scherer, *Interpolation of linear operators on Sobolev spaces*, Ann. of Math., 109 (1979), 583—599.

[5] C. P. Calderon and M. Milman, *Interpolation of Sobolev spaces the real method*, Indiana Univ. Math. J., 32(1983), 801—808.

[6] 彭立中, Hardy-Sobolev 空间, 北京大学学报(自然科学版), 2(1983), 26—40.

[7] C. Fefferman and E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math., 129(1972), 137—194.

[8] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Function*, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

Interpolation between Sobolov Spaces

Liu Lanze

(Dept. of Math., Changsha University of Water Resources and Electric Power, 410077)

Abstract

In this paper, the real interpolation spaces between the Sobolev spaces L_k^∞, BMO_k and L_k^p, $H_k^p(0<p<\infty)$ are obtained.

Keywords Sobolev spaces, interpolation.