第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

二维复空间型的全实曲面*

罗　治　国

(湖南师范大学数学系，长沙 410081)

摘　要　本文有兴趣于二维复空间型的全实曲面的研究. 得到了一些有趣结果，并将[1,2]中的有关定理推广到具平行平均曲率向量的全实曲面的情形.

关键词　复空间型，全实曲面，平行平均曲率向量.

分类号　AMS(1991) 53C40/CCL O186.16

1　记号和公式

设 $N^n(c)$ 是常全纯截面曲率 c 的 n 维复空间型，J 是其复结构. 设 M 是浸入在 $N^n(c)$ 中的 n 维全实子流形. 在 $N^n(c)$ 中选取局部标准正交标架场 $e_1,\cdots,e_n,e_{1^*}=Je_1,\cdots,e_{n^*}=Je_n$，使当限制到 M 上时，$e_1,\cdots,e_n$ 与 M 相切. 设 $w_1,\cdots,w_n,w_{1^*},\cdots,w_{n^*}$ 是其对偶标架场，$\{w_{AB}\}_{A,B=1,\cdots,n,1^*,\cdots,n^*}$ 是联络形式，那么有

$$w_{i^*j^*}=w_{ij},\quad w_{i^*j}=w_{j^*i},\tag{1.1}$$

$$w_{k^*i}=\sum_j h_{ij}^{k^*}w_j,\quad h_{ij}^{k^*}=h_{ji}^{k^*}=h_{jk}^{i^*}=h_{ki}^{j^*}.\tag{1.2}$$

M 的 Gauss 方程为

$$R_{ijkl}=\frac{c}{4}(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})+\sum(h_{ik}^{m^*}h_{jl}^{m^*}-h_{il}^{m^*}h_{jk}^{m^*}),\tag{1.3}$$

$$R_{i^*j^*kl}=R_{ijkl}.\tag{1.4}$$

用下式定义 $h_{ij}^{m^*}$ 的协变导数 $h_{ijk}^{m^*}$

$$\sum_k h_{ijk}^{m^*}w_k=dh_{ij}^{m^*}-\sum h_{kj}^{m^*}w_{ki}-\sum h_{ik}^{m^*}w_{kj}-\sum_k h_{ij}^{k^*}w_{k^*m^*},\tag{1.5}$$

M 的 Codazzi 方程为

$$h_{ijk}^{m^*}=h_{ikj}^{m^*}.\tag{1.6}$$

由(1.1)，(1.2)和(1.5)可得

$$h_{ijk}^{m^*}=h_{jkm}^{m^*}=h_{kmi}^{j^*}=h_{mij}^{k^*},\tag{1.7}$$

即若记 $h_{ijk}^{m^*}=h_{ijk}^m$，则 h_{ijk}^m 关于所有指标对称. 经直接计算(参见[3])有

$$\sum h_{ij}^{m^*}\Delta h_{ij}^{m^*}=\sum h_{ij}^{m^*}h_{kl}^{m^*}R_{lijk}+\sum h_{ij}^{m^*}h_{il}^{m^*}R_{lkjk}-\sum h_{ij}^{m^*}h_{ki}^{n^*}R_{m^*n^*jk}.\tag{1.8}$$

* 1993年9月23日收到.

记

$$S=\sum(h_{ij}^{m^*})^2,\quad H^2=\frac{1}{n^2}\sum_m(\sum_i h_{ii}^{m^*})^2,\tag{1.9}$$

则 S,H 分别是 M 的第二基本形式的长度平方和平均曲率.如果 M 有平行平均曲率向量,则由(1.5)和(1.9)易得

$$\sum_i h_{iik}^{m^*}=0(m,k=1,\cdots,n).\tag{1.10}$$

2 结果与证明

本节设 $N^2(c)$是具常全纯截面曲率 c 的 Kaehler 曲面即二维复空间型,M 是 $N^2(c)$的全实曲面,那么,M 的 Gauss 方程为

$$2K=\frac{1}{2}c+4H^2-S.\tag{2.1}$$

由(1.7),(1.10)径直接计算有

$$\sum(h_{ijk}^{m^*})^2=8[(h_{111}^{1^*})^2+(h_{111}^{2^*})^2].\tag{2.2}$$

定理 1 设 M 是常全纯截面曲率 c 的 Kaehler 曲面 $N^2(c)$的全实曲面,那么

$$S\geqslant 3H^2,\tag{2.3}$$

等号成立且 M 有平行平均曲率向量时,M 有平行第二基本形式.

证明 利用(1.2)径直接计算得

$$4(S-3H^2)=(h_{11}^{1^*}-3h_{22}^{1^*})^2+(3h_{11}^{2^*}-h_{22}^{2^*})^2\geqslant 0,\tag{2.4}$$

此即证明了(2.3)成立.若 $S=3H^2$,则由(2.4)

$$h_{11}^{1^*}=3h_{22}^{1^*},\quad 3h_{11}^{2^*}=h_{22}^{2^*}.\tag{2.5}$$

但是,由(1.5),(1.1),(1.2)有

$$\sum_k h_{11k}^{1^*}w_k=dh_{11}^{1^*}+3h_{11}^{2^*}w_{12},\tag{2.6}$$

$$\sum_k h_{22k}^{1^*}w_k=dh_{22}^{1^*}-2h_{11}^{2^*}w_{12}+h_{22}^{2^*}w_{12}.\tag{2.7}$$

所以,由(2.5),(2.6),(2.7)得

$$h_{111}^{1^*}=3h_{221}^{1^*}\quad,h_{112}^{1^*}=3h_{222}^{1^*}.\tag{2.8}$$

将(2.8)代入(1.10),并注意到(1.7)有

$$h_{111}^{1^*}=h_{111}^{2^*}=0,$$

于是由(2.1),$h_{ijk}^{m^*}=0(i,j,k,m=1,2)$即 M 有平行第二基本形式.

由定理 1 和 Gauss 方程(2.1),有

推论 设 M 是常全纯截面曲率 c 的 Kaehler 曲面的全实曲面,则 M 的 Gauss 曲率

$$K\leqslant\frac{c}{4}+\frac{1}{2}H^2,$$

当 $K=\frac{c}{4}+\frac{1}{2}H^2$ 且 M 有平行平均曲率向量时,M 有平行第二基本形式.

类似定理 1 的证明，不难得到

引理 1 设 M 是 Kaehler 曲面 N 的全实曲面，那么 $3S \geqslant 8H^2$，等号成立当且仅当 M 是全测地的.

引理 2 设 M 是常全纯截面曲率 c 的 Kaehler 曲面的全实曲面，有平行平均曲率向量，那么

$$|\nabla S|^2 = 2(S - 3H^2)\sum(h_{ijk}^{m^*})^2. \tag{2.9}$$

证明 利用(1.2)，(1.7)，(1.10)得

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2}\nabla S|^2 = & \sum_k(\sum h_{ij}^{m^*}h_{ijk}^{m^*})^2 = [(h_{11}^{1^*} - 3h_{22}^{1^*})h_{111}^{1^*} + (3h_{11}^{2^*} - h_{22}^{2^*})h_{111}^{2^*}]^2 \\ & + [(h_{11}^{1^*} - 3h_{22}^{1^*})h_{111}^{2^*} - (3h_{11}^{2^*} - h_{22}^{2^*})h_{111}^{1^*}]^2 \\ = & [(h_{11}^{1^*} - 3h_{22}^{1^*})^2 + (3h_{11}^{2^*} - h_{22}^{2^*})^2][(h_{111}^{1^*})^2 + (h_{111}^{2^*})^2].\end{aligned}$$

注意到(2.2)和(2.4)，立即有

$$|\frac{1}{2}\nabla S|^2 = \frac{1}{2}(S - 3H^2)\sum(h_{ijk}^{m^*})^2,$$

此即(2.9).

现在计算 M 的第二基本形式的 Laplace.

由(1.8)，(1.3)和(1.4)经计算得

$$\sum h_{ij}^{m^*}\Delta h_{ij}^{m^*} = K[4\sum(h_{12}^{m^*})^2 - 4\sum h_{11}^{m^*}h_{22}^{m^*} + S],$$

但是 $S - 4H^2 = 2\sum(h_{12}^{m^*})^2 - 2\sum h_{11}^{m^*}h_{22}^{m^*}$. 所以

$$\sum h_{ij}^{m^*}\Delta h_{ij}^{m^*} = K(3S - 8H^2),$$

$$\frac{1}{2}\Delta S = \sum(h_{ijk}^{m^*})^2 + K(3S - 8H^2). \tag{2.10}$$

定理 2 设 M 是常全纯截面曲率 c 的 Kaelher 曲面 $N^2(c)$ 的全实曲面. 有平行平均曲率向量. 若 M 是下列两种情形之一：

1. M 有常 Gauss 曲率 K.

2. M 完备，且 Gauss 曲率非负.

那么，M 或者是全测地的，或者是平坦的，在后一情形，M 有平行第二基本形式.

证明 若 M 有常数 Gauss 曲率 K，则由 Gauss 方程(2.2)，S 为常数. 于是依引理 2 和定理 1，M 有平行第二基本形式，由(2.10)，$3S = 8H^2$ 或 $K = 0$. 即 M 是全测地的或平坦的.

若 M 完备且 Gauss 曲率 $K \geqslant 0$，则 M 是抛物型的. 由(2.10)和引理 1，$3S = 8H^2$ 或 $K = 0$，且 $\sum(h_{ijk}^{m^*})^2 = 0$，即 M 是全测地的或平坦的. 在后一情形，M 有平行第二基本形式.

定理 3 设 M 是常全纯截面曲率 c 的 Kaehler 曲面的全实曲面，有平行第二基本形式，那么 M 是全测地的或平坦的.

证明 由[4]中定理 2 知，Riemann 流形的每个具平行第二基本形式的子流形皆有平行平均曲率向量，所以在定理 3 的条件下，M 有平行平均曲率向量，于是由引理 2，S = 常数. 由(2.10)，即得 M 是全测地的或平坦的.

参 考 文 献

[1] C.S.Houh, *Some totally real minimal surfaces in CP^2*, Proc. Amer. Math. Soc., 40(1973), 240—244.

[2] S.T.Yau, *Submanifolds with constant mean curvature* I, Amer. J. Math., 96(1974), 346—366.

[3] S.S.Chern, do Carmo M and Kobayashi S., *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, shiing shen, chern selected papers*, Springer-Verlag, 1978, 393—404.

[4] M.A.AL-Gwaiz and S.Deshmukh, *Totally real surfaces in CP^2 with parallel mean curvature*, Vector. Inter. J. Math. & Math. Sci., 15(1992), 589—592.

Totally Real Surfaces in a 2-Dimensional Complex Space Form

Luo Zhiguo

(Dept. of Math., Hunan Normal Univ., Changsha 410081)

Abstract

This paper considers totally real surfaces in 2-dimensional complexx space form. The results generalize the corresponding conclusions in [1,2].

Keywords complex space form, totally real surface, parallel mean curvature vecter.