第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

常曲率空间中具平行平均曲率向量的子流形*

胡泽军 孙振祖

(郑州大学数学系, 450052)

摘 要 本文利用第二基本形式的长度平方和平均曲率的关系研究常曲率空间中具平行平均曲率向量的子流形为全脐的 pinching 问题,获得了一定条件下的最佳 pinching 区间,并确定了 phincning 区间端点处对应非全脐子流形的分类.

关键词 全脐,第二基本形式,平均曲率.

分类号 AMS(1991) 53C40/CCL O186.16

§1 引 言

设 $N^{n+p}(c)$ 是 $(n+p)$ 维具常截面曲率 c 的 Riemann 流形,M 是等距浸入在 $N^{n+p}(c)$ 中的 n 维子流形. 利用第二基本形式的长度平方与平均曲率间的关系来研究 M 的全脐性已见诸许多著名的文献(如[1]—[7]等). 尤其对于极小子流形,文献[1]因为给出了球空间中全测地子流形的最佳 pinching 区间而成为划时代的文献,对其后微分几何学的发展产生了重大影响. 作为极小子流形的一种自然推广,研究具平行平均曲率向量的子流形的全脐性问题吸引了众多的数学工作者,文献[2]—[6]等在此领域上均取得了有意义的成果. 目前的问题是:已有文献要么仅给出子流形为全脐的充分条件,要么对外围空间的截面曲率附加一个特殊要求(如 $c>0$). 总之,目前为止对一般常曲率外围空间,关于全脐的最佳 pinching 区间尚未找到. 在文[9]中关于超曲面证明了如下

定理 A[9] 设 M 是浸入在 $N^{n+1}(c)$ 中的 n 维连通紧致无边超曲面,具常平均曲率 $H>0$. 如果 $c+H^2>0$ 且 M 满足

$$\|\sigma\|^2\leqslant nc+\frac{n^3H^2}{2(n-1)}-\frac{n(n-2)H}{2(n-1)}\sqrt{4(n-1)c+n^2H^2}, \tag{1.1}$$

则 M 只能是如下两种情形之一:

(i) $\|\sigma\|^2=nH^2$,且 $M=S^n(\frac{1}{\sqrt{c+H^2}})$ 是 $N^{n+1}(c)$ 的全脐超曲面.

(ii) $c>0$,(1.1)中等号成立且 $M=S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{c_1}})\times S^1(\frac{1}{\sqrt{c_2}})\hookrightarrow S^{n+1}(\frac{1}{\sqrt{c}})$,其中 c_1,c_2 定义为

* 1993年3月10日收到. 河南省自然科学基金资助的课题.

$$
\begin{cases}
c_1 = \dfrac{1}{2(n-1)^2}[2n(n-1)c + n^2H^2 + nH\sqrt{4(n-1)c + n^2H^2}], \\
c_2 = \dfrac{1}{2}[2nc + n^2H^2 - nH\sqrt{4(n-1)c + n^2H^2}].
\end{cases}
\tag{1.2}
$$

本文继续对具平行平均曲率向量的子流形进行研究，获得的主要结果如下：

定理 1 设 M 是浸入在 $N^{n+2}(c)$ 中 n 维连通紧致无边子流形，具非零的平行平均曲率向量 ξ，$\|\xi\| = H > 0$，如果 $c + H^2 > 0$ 且 M 满足(1.1)，则 M 为下列四种情况之一：

(i) M 全脐，即有 $M = N^n(c + H^2)$.

(ii) (1.1)中等号成立，

$$
\|\tau\| \equiv 0, c > 0, M = S^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{c_1}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{c_2}}\right) \to N^{n+1}(c),
$$

其中 c_1, c_2 由(1.2)定义.

(iii) $n = 2, \|\sigma\|^2 \equiv 2c + 4H^2, \|\mu\| \neq 0, M = S^1\left(\frac{1}{\sqrt{c_1}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{c_2}}\right) \to N^3(c + H_1^2)$,

其中 $-c < H_1^2 < H^2, c_1 = 2\sqrt{c + H^2}(\sqrt{c + H^2} + \sqrt{H^2 - H_1^2}), c_2 = 2\sqrt{c + H^2}(\sqrt{c + H^2} - \sqrt{H^2 - H_1^2})$.

(iv) $n = 2, \|\sigma\|^2 \equiv 2c + 4H^2, \|\mu\| \equiv 0, M = S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2(c + H^2)}}\right) \times S^1\left(\frac{1}{\sqrt{2(c + H^2)}}\right)$ 是 $N^4(c)$ 的全脐超曲面 $N^3(c + H^2)$ 的极小子流形.

定理 2 设 M 是浸入在 $N^{n+p}(c)(p \geqslant 3)$ 中 n 维连通紧致无边子流形，具非零的平行平均曲率向量 ξ，$\|\xi\| = H > 0$，如果 $c + H^2 > 0$ 且 M 满足

$$
\|\sigma\|^2 \leqslant \min\left\{\frac{2}{3}n\left(c + \frac{5}{2}H^2\right); nc + \frac{n^3H^2}{2(n-1)} - \frac{n(n-2)H}{2(n-1)}\sqrt{4(n-1)c + n^2H^2}\right\},
\tag{1.3}
$$

则 M 是下列三种情形之一：(i)，(ii)与定理 1 对应相同； (iii) $n = 2, \|\sigma\|^2 = \frac{4}{3}\left(c + \frac{5}{2}H^2\right)$，$\|\mu\| \equiv 0$，$M$ 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐超曲面 $N^{n+p-1}(c + H^2)$ 的全测地子流形 $N^4(c + H^2)$ 中 Veronese 曲面.

注记 1° 关于条件(1.3)，有

$$
\min\left\{\frac{2}{3}n\left(c + \frac{5}{2}H^2\right); nc + \frac{n^3H^2}{2(n-1)} - \frac{n(n-2)H}{2(n-1)}\sqrt{4(n-1)c + n^2H^2}\right\}
$$

$$
= \begin{cases}
nc + \dfrac{n^3H^2}{2(n-1)} - \dfrac{n(n-2)H}{2(n-1)}\sqrt{4(n-1)c + n^2H^2}\}, & 6(n-2)^2H^2 \geqslant (n-1)(c + H^2) \text{时}, \\
\dfrac{2}{3}\left(c + \dfrac{5}{2}H^2\right), & 6(n-2)^2H^2 < (n-1)(c + H^2) \text{时}.
\end{cases}
$$

注记 2° 易知[2]之定理 8 和[7]之定理 1、2 中均要求 $H \neq 0$，因此本文主要结果是对[2]，[7]中有关定理的全面改进，并肯定地回答了[2]中定理 8 之后注记所提出的问题.

注记 3° 定理 1，2 可考虑向 M 为完备流形的情况推广. 文献[5]借助[10]所采用的一个引理就 $c = 0$ 这种情况进行过尝试. 遗憾的是，[11]用反例说明上述引理是错的，因此[5]中定理 1 的证明有误. 不过，推广可用与[9]，[11]类似的方式进行，本文从略.

§2 准备工作

设 $N^{n+p}(c)$是$(n+p)$维常截面曲率 c 的 Riemann 流形，并约定：$c=0$ 时，$N^{n+p}(c)=E^{n+p}$；$c>0$ 时，$N^{n+p}(c)=S^{n+p}(\frac{1}{\sqrt{c}})$；$c<0$ 时，$N^{n+p}(c)=H^{n+p}(\frac{1}{\sqrt{-c}})$. 设 M 是等距浸入在 $N^{n+p}(c)$ 中的 n 维子流形. 选取 $N^{n+p}(c)$中的局部单位正交标架场 $e_1,\cdots,e_{n+p}$，使限制在 M 上时，$e_1,\cdots,e_n$ 切于 M. 约定指标范围如下：$1\leqslant A,B,\cdots\leqslant n+p$；$1\leqslant i,j,k,\cdots\leqslant n$；$n+1\leqslant\alpha,\beta,\gamma,\cdots\leqslant n+p$. 并约定重复指标是关于相应取值范围作和.

设 $\omega_1,\cdots,\omega_{n+p}$是 $N^{n+p}(c)$中关于上面选取的标架场的对偶场，(ω_{AB})为对应的联络形式. 限制到 M 上，有[2]

$$\omega_\alpha=0,\quad \omega_{\alpha j}=\sum_i h^\alpha_{ji}\omega_i,\quad h^\alpha_{ji}=h^\alpha_{ij},\tag{2.1}$$

$$R_{ijkl}=c(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk}+\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\alpha_{jl}-h^\alpha_{il}h^\alpha_{jk}),\tag{2.2}$$

$$R_{\alpha\beta kl}=\sum_\alpha(h^\alpha_{ik}h^\beta_{il}-h^\alpha_{il}h^\beta_{ik}),\tag{2.3}$$

对每个 α，用 H^α 表示矩阵$(h^\alpha_{ij})_{n\times n}$，称 $\xi=\frac{1}{n}\sum_\alpha(\mathrm{tr}H^\alpha)e_\alpha$ 为 M 的平均曲率向量；$\sigma=\sum_{\alpha,i,j}h^\alpha_{ij}\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha$ 为 M 的第二基本形式. 由(2.2)知 M 的数量曲率为

$$R=n(n-1)c+n^2H^2-\|\sigma\|^2,\tag{2.4}$$

其中 $H^2=\|\xi\|^2$，$\|\sigma\|^2=\sum_\alpha\mathrm{tr}(H^\alpha)^2$分别表示平均曲率向量的长度平方和第二基本形式的长度平方.

用 h^α_{ijk}和 h^α_{ijkl}表示张量 h^α_{ij}的一阶和二阶共变导数，则有[2]

$$h^\alpha_{ijk}=h^\alpha_{ikj},\tag{2.5}$$

$$h^\alpha_{ijkl}-h^\alpha_{ijlk}=\sum_m h^\alpha_{im}R_{mjkl}+\sum_m h^\alpha_{mj}R_{mikl}-\sum_\beta h^\beta_{ij}R_{\alpha\beta kl},\tag{2.6}$$

$$\Delta h^\alpha_{ij}\equiv\sum_k h^\alpha_{ijkk}=\sum_k h^{\alpha\prime}_{kkij}+\sum_{m,k}(h^\alpha_{km}R_{mijk}+h^\alpha_{mi}R_{mkjk})-\sum_{\beta,k}h^\beta_{ki}R_{\alpha\beta jk},\tag{2.7}$$

以下总选取 e_{n+1}使 $\xi=He_{n+1}$，于是有

$$\mathrm{tr}H^{n+1}=nH,\quad \mathrm{tr}H^\alpha=0,\ \alpha\neq n+1,\tag{2.8}$$

其中 H 为 M 的平均曲率. 令 $\mu=\sum_{i,j}(h^{n+1}_{ij}-H\delta_{ij})\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_{n+1}$，$\tau=\sum_{\substack{i,j\\ \alpha\neq n+1}}h^\alpha_{ij}\omega_i\otimes\omega_j\otimes e_\alpha$，则有：

$$\mathrm{tr}\mu=0,\quad \mathrm{tr}\tau=0,\tag{2.9}$$

$$\|\mu\|^2=\mathrm{tr}(H^{n+1})^2-nH^2,\quad \|\tau\|^2=\sum_{\beta\neq n+1}\mathrm{tr}(H^\beta)^2,\tag{2.10}$$

$$\|\sigma\|^2=\|\mu\|^2+\|\tau\|^2+nH^2,\tag{2.11}$$

于是，$\|\mu\|^2$ 和 $\|\tau\|^2$ 是 M 上整体定义的两个函数. 并且，M 伪脐即 $h^{n+1}_{ij}=H\delta_{ij}$ 当且仅当 $\|\mu\|^2\equiv0$；M 是全脐的当且仅当 M 是伪脐的且有 $\|\tau\|^2\equiv0$.

以下总假定 M 的平均曲率向量 ξ 是平行的. 众所周知，$N^{n+p}(c)(c\leqslant0)$中不存在紧致无边

的极小子流形，而当 $c>0$ 时，关于 $N^{n+p}(c)$ 的极小子流形已有[1]的结果. 故以下总设 $\xi\neq 0$，从而有

$$\omega_{\beta,n+1}=0,\quad \forall\,\beta, H=\text{常数}\neq 0, \tag{2.12}$$

不失一般性，假定平均曲率 $H>0$.

将(2.12)代入(2.7)，并利用(2.2)和(2.3)我们有[2]：

$$\sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}=nc\operatorname{tr}(H^{n+1})^2-n^2cH^2+nH\operatorname{tr}(H^{n+1})^3-[\operatorname{tr}(H^{n+1})^2]^2$$
$$-\sum_{\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}(H^{n+1}H^\beta)]^2, \tag{2.13}$$

$$\sum_{\substack{i,j\\ \beta\neq n+1}}h_{ij}^{\beta}\Delta h_{ij}^{\beta}=nc\sum_{\beta\neq n+1}\operatorname{tr}(H^\beta)^2+\sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\{\operatorname{tr}(H^\alpha H^\beta-H^\beta H^\alpha)^2-(\operatorname{tr}(H^\alpha H^\beta)^2\}$$
$$-\sum_{\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}(H^{n+1}H^\beta)]^2+nH\sum_{\beta\neq n+1}\operatorname{tr}[H^{n+1}(H^\beta)^2]. \tag{2.14}$$

§3 主要结果及其证明

定理B 设 M 是浸入在 $N^{n+p}(c)(p\geqslant 1)$ 中 n 维连通紧致无边子流形，具平行平均曲率向量 ξ，$\|\xi\|=H>0$，$c+H^2>0$，如果 M 还满足(1.1)，则下列三种情形之一成立： (i) M 伪脐是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐超曲面 $N^{n+p-1}(c+H^2)$ 中极小子流形； (ii)(1.1)为等式且 $\|\tau\|\equiv 0$，这时有 $c>0$ 且 M 位于 $N^{n+p}(c)$ 的 $n+1$ 维全测地子流形 $N^{n+1}(c)$ 中有 $M=S^{n-1}(\frac{1}{\sqrt{c_1}})\times S^1(\frac{1}{\sqrt{c_2}})$，其中 c_1,c_2 由(1.2)式定义； (iii) $n=2$，$\|\sigma\|^2=2c+4H^2$，$\|\mu\|=ct\neq 0$，$\|\tau\|=ct\neq 0$，且 $M=S^1(\frac{1}{\sqrt{c_1}})\times S^1(\frac{1}{\sqrt{c_2}})\to N^3(c+H_1^2)=S^3(\frac{1}{\sqrt{c+H_1^2}})$，其中常数 H_1 满足：$-c<H_1^2<H^2$，$c_1=2\sqrt{c+H^2}(\sqrt{c+H^2}+\sqrt{H^2-H_1^2})$，$c_2=2\sqrt{c+H^2}(\sqrt{c+H^2}-\sqrt{H^2-H_1^2})$.

证明 由(2.8)和(2.10)及Schwarz不等式可得

$$\sum_{\beta\neq n+1}[\operatorname{tr}(H^{n+1}H^\beta)]^2=\sum_{\beta\neq n+1}\{\operatorname{tr}[(H^{n+1}-HI)H^\beta]\}^2\leqslant\|\mu\|^2\|\tau\|^2, \tag{3.1}$$

等号成立当且仅当 H^β 与 $H^{n+1}-HI$ 相差一个倍数，其中 I 表示单位矩阵.

由(2.9)，(2.10)并利用一个著名的代数引理[3]得

$$\operatorname{tr}(H^{n+1})^3=\operatorname{tr}\mu^3+3H\operatorname{tr}\mu^2+nH^3$$
$$=-\frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}\|\mu\|^3+3H\|\mu\|^2+nH^3. \tag{3.2}$$

将(3.1)，(3.2)代入(2.13)，并利用(2.10)，(2.11)可得

$$\sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}\geqslant\|\mu\|^2[nc+2nH^2\geqslant\|\sigma\|^2-\frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}\|\mu\|]. \tag{3.3}$$

利用(1.1)和(3.3)，有

$$\frac{1}{2}\Delta\|\mu\|^2=\frac{1}{2}\Delta[\sum_{i,j}(h_{ij}^{n+1})^2-nH^2]\geqslant\sum_{i,j}h_{ij}^{n+1}\Delta h_{ij}^{n+1}$$

$$\geqslant\|\mu\|^2[nc+2nH^2-\|\sigma\|^2-\frac{n(n-2)H}{\sqrt{n(n-1)}}\|\mu\|]$$

$$\geqslant\frac{n(n-2)}{\sqrt{n(n-1)}}H\|\mu\|^2[\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}-\frac{n(n-2)}{2\sqrt{n(n-1)}}H-\|\mu\|].\qquad(3.4)$$

由 $c+H^2>0$ 知 $\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}-\frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}}>0$；(1.1) 则保证了 $\|\mu\|\leqslant\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}-\frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}}$ 且等号成立当且仅当有 $\|\tau\|^2=0$ 和 $\|\sigma\|^2=nc+\frac{n^3H^2}{2(n-1)}-\frac{n(n-2)H}{2(n-1)}\times\sqrt{4(n-1)c+n^2H^2}$；而 $n\geqslant2$ 是自然假定. 因此由(3.4)知 $\|\mu\|^2$ 是紧致无边流形 M 上的次调和函数，根据 Hopf 极大值原理，$\|\mu\|^2=$ 常数，从而又由(3.4)得：$n=2$ 或 $\|\mu\|=0$ 或 $\|\mu\|\equiv\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}-\frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}}$.

(i) 当 $\|\mu\|^2\equiv0$ 时，M 为伪脐的，由[2]中定理1知 M 是 $N^{n+p}(c)$ 的全脐超曲面 $N^{n+p-1}(c+H^2)$ 的极小流形；

(ii) 当 $\|\mu\|=\sqrt{nc+\frac{n^3H^2}{4(n-1)}}-\frac{n(n-2)H}{2\sqrt{n(n-1)}}$ 时，$\|\tau\|\equiv0$ 且(1.1)成立等式，因此 M 关于其法子丛 $e_{n+2}\otimes\cdots\otimes e_{n+p}$ 是全测地的. 但 $e_{n+2}\otimes\cdots\otimes e_{n+p}$ 是法丛中的平行子丛，故根据[2]中定理1，M 位于 $N^{n+p}(c)$ 的一个 $n+1$ 维全测地子流形 $N^{n+1}(c)$ 中作为超曲面且 e_{n+1} 是 $M\to N^{n+1}(c)$ 的单位法向量场. 从而 $M\to N^{n+1}(c)$ 具非零的平均曲率 H，对应的第二基本形式的长度平方仍为 $\|\sigma\|^2\equiv nc+\frac{n^3H^2}{2(n-1)}-\frac{n(n-2)H}{2(n-1)}\sqrt{4(n-1)c+n^2H^2}$，进而对 $M\to N^{n+1}(c)$ 应用定理A就得到定理B中结论(ii)；

(iii) 当 $n=2$ 时，若 M 不是伪脐即 $\|\mu\|^2=$ 常数 $\neq0$，则由于(3.3)式右端为零，得到 $\|\sigma\|^2\equiv2c+4H^2$，从而由(2.4)知 M 是平坦曲面，且 $\|\tau\|^2=$ 常数. 若 $\|\tau\|^2\equiv0$，则化为情形(ii). 下设 $\|\tau\|^2=$ 常数 $\neq0$，根据[2]中定理4和上述分析知：M 是 $N^{n+p}(c)$ 的某三维全脐非全测地子流形 $N^3(c+H_1^2)$ 中具非零的常平均曲率的平坦曲面，$H_1\neq0$，而 $M\to N^3(c+H_1^2)$ 的平均曲率 H_2 满足 $H_2^2=H^2-H_1^2>0$，对应第二基本形式的长度平方 $\|\sigma_1\|^2=2(c+H_1^2)+4(H_2)^2$. 于是由 M 的紧致性及定理A可得：$-c<H_1^2<H^2$，$M=S^1(\frac{1}{\sqrt{c_1}})\times S^1(\frac{1}{\sqrt{c_2}})$ 且 $c_1=2\sqrt{c+H^2}(\sqrt{c+H^2}+\sqrt{H^2-H_1^2})$，$c_2=2\sqrt{c+H^2}(\sqrt{c+H^2}-\sqrt{H^2-H_1^2})$. 证毕.

注记4 当 $p=1$ 时，定理B就是定理A.

定理1的证明 根据假定，定理B的条件满足. 从而，如 M 不是(ii)和(iii)，则它必是 $N^{n+2}(c)$ 的伪脐子流形且是 $N^{n+1}(c+H^2)$ 中的极小超曲面. 进一步，由(2.14)并利用(2.10)，有

$$\sum_{i,j} h_{ij}^{n+2}\Delta h_{ij}^{n+2} = nc\|\tau\|^2 - \|\tau\|^4 + nH^2\|\tau\|^2 = \|\tau\|^2[(c+H^2) - \|\tau\|^2],$$

于是有

$$\frac{1}{2}\Delta\|\tau\|^2 \geqslant \|\tau\|^2[n(c+H^2) - \|\tau\|^2], \tag{3.5}$$

(a) 当 $n>0$ 时，由(1.1)及 $c+H^2>0$ 可得：

$$\|\tau\| = \|\sigma\|^2 - nH^2 \leqslant nc + \frac{n^3H^2}{2(n-1)} - nH^2 - \frac{n(n-2)H}{2(n-1)}\sqrt{4(n-1)c+n^2H^2}$$

$$< n(c+H^2), \tag{3.6}$$

结合(3.5)，(3.6)可推知 $\|\tau\|\equiv 0$. 因此 M 全脐，(i)成立.

(b) 当 $n=2$ 时，(1.1)化为 $\|\sigma\|^2\leqslant 2c+4H^2$，从而有

$$\|\tau\|^2 \leqslant 2c + 2H^2, \tag{3.7}$$

结合(3.5)，(3.7)可推知 $\|\tau\|^2=$常数，从而由(3.5)推知 $\|\tau\|^2\equiv 0$ 或者 $\|\tau\|\equiv 2(c+H^2)$. 当 $\|\tau\|\equiv 0$ 时，M 全脐，(i)成立；$\|\tau\|^2\equiv 2(c+H^2)$时，注意到 $\|\tau\|$ 是 $M\underset{\text{极小}}{\rightarrow} N^3(c+H^2)$的第二基本形式的长度平方，由[1]知 $M=S^1(\frac{1}{\sqrt{2(c+H^2)}})\times S^1(\frac{1}{\sqrt{2(c+H^2)}})$，即(iv)成立. 证毕.

定理 2 的证明 根据假定，定理 B 的条件满足. 注意到当 $n=2$ 时，(1.3) 化为 $\|\sigma\|^2\leqslant \frac{4}{3}(c+\frac{5}{2}H^2)$，而 $\frac{4}{3}(c+\frac{5}{2}H^2) < 2c+4H^2$，从而根据定理 B，如果不是情形(ii)，$M$ 就是 $N^{n+p}(c)$ 的伪脐子流形.

如果 M 伪脐，则 M 是 $N^{n+p-1}(c+H^2)$的极小子流形. 进一步，由(2.14)，利用 M 的伪脐性和一个著名的代数引理[8]，有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta\|\tau\|^2 &\geqslant \sum_{\substack{i,j\\ \beta\neq n+1}} h_{ij}^{\beta}\Delta h_{ij}^{\beta} \\
&= n(c+H^2)\|\tau\|^2 + \sum_{\alpha,\beta\neq n+1}\{\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta - H^\beta H^\alpha)^2 - [\mathrm{tr}(H^\alpha H^\beta)]^2\} \\
&\geqslant -\frac{3}{2}\|\tau\|^4 + n(c+H^2)\|\tau\|^2 \\
&= \|\tau\|^2[n(c+H^2) - \frac{3}{2}\|\tau\|^2],
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由(1.3)得到 $\|\tau\|^2=\|\sigma\|^2-nH^2\leqslant\frac{2}{3}n(c+H^2)$，于是由(3.8)可知：$\|\tau\|^2$ 是 M 上的次调和函数，故为常数. 进一步可知：或者 $\|\tau\|^2\equiv 0$，或者 $\|\tau\|^2\equiv\frac{2}{3}n(c+H^2)$.

如果 $\|\tau\|^2\equiv 0$，则 M 全脐即(i)成立；如果 $\|\tau\|^2\equiv\frac{2}{3}n(c+H^2)$，注意到 $\|\tau\|^2$ 是极小子流形 $M\rightarrow N^{n+p-1}(c+H^2)$的第二基本形式的长度平方，故根据[8]中定理 3 可得：$n=2$，M 是 $N^4(c+H^2)$中的 Veronese 曲面，即(iii)成立. 证毕.

参 考 文 献

[1] S. S. Chern, M. Do Carmo and S. Kobayashi, *Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length*, Functional Analysis and Related Fields, Springer-Verlag, 1970, 59—75.

[2] S. T. Yau, *Submanifolds with constant mean curvature*, Amer. J. Math., 96(1974), 346—366; 97 (1975), 76—100.

[3] M. Okumura, *Hypersurfaces and a prinching problem on the second fundamental tensor*, Amer. J. Math., 96(1974), 207—213.

[4] M. Okumura, *Submanifolds and a pinching problem on the second fundamental tensor*, Trans. A. M. S., 178(1973), 285—291.

[5] Y. B. Shen, *Complete submanifolds in E^{n+p} with parallel mean curvature*, Chin. Ann. of Math., 6B(3)(1985), 345—350.

[6] Y. B. Shen, *Remarks on hypersurfaces with constant mean curvature in a higher dimensional pseudo-sphere*, Chin. Ann. of Math., 7B(4)(1986), 483—487.

[7] 莫小欢，常曲率空间中具有平行平均曲率向量的子流形，数学年刊，9A(5)(1988)，530—540.

[8] A. M. Li and J. M. Li, *An inequality for matrices and its applications in differential geometry*, 数学进展，20(3)(1991)，375.

[9] 宋鸿藻、胡泽军，空间形式中具常平均曲率的超曲面，数学季刊(待发表).

[10] Th. Hasanis, *Conformally flat spaces and a pinching problem on the Ricci tensor*, Proc. A. M. S., 86(1982), 312—315.

[11] B. Q. Wu, Q. M. Cheng, *The generalized maximum principle and conformally flat spaces*, 东北数学，8(1)(1992)，54—56.

Submanifolds with Parallel Mean Curvature in Spaces of Constant Curvature

Hu Zejun　　*Sun Zhenzu*

(Dept. of Math., Zhengzhou University, Zhengzhou 450052)

Abstract

We discuss the pinching problem for a submanifold with parallel mean curvature vector in spaces of constant curvature to be totally umbilical by using the relationship between the square of the length of the second fundamental form and the mean curvature, we obtain the best pinching intervals and give a complete classification of submanifolds at the terminal of the intervals.

Keywords　totally umbilical, second fundamental form, mean curvature.