第16卷第1期　数学研究与评论　Vol. 16 No. 1
1996年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 1996

Orlicz 函数空间单位球端点的一个重要特征*

田　申　　王廷辅　　王全迪
(哈尔滨理工大学数学系，150080)

摘　要　无论赋 Luxemburg 范数或赋 Orlicz 范数，Orlicz 函数空间单位球上的点为端点的充要条件是，于此点处 E_N 弱收敛蕴涵测度收敛.

关键词　Orlicz 空间，端点，E_n-μ 点.
分类号　AMS(1991) 46E30,46B20/CCL O177.3

众所周知，于 Orlicz 序列空间，依坐标收敛等价于 h_N 弱收敛. 但于 Orlicz 函数空间，尽管测度收敛蕴涵 E_N 弱收敛([1]Th14.6)但其逆即使在单位球面上也不成立. 本文指出，它恰好构成单位球端点的一个重要判据.

设 $\|x\|=1$，若对任何点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\|x_n\|=1(n=1,2,\cdots)x_n\xrightarrow{E_N}x$ 蕴涵 $x_n\xrightarrow{\mu}x$，则称 x 为 E_n-μ 点. 我们发现，于 Orlicz 函数空间，当且仅当 x 是单位球端点时才是 E_n-μ 点.

一　预备知识

以 G 表示 n 维空间 E^n 中有界闭集，μ-Lebesgue 测度，$M(u)$，$N(v):R\to R$ 为一对互余的 N 函数，$p(t)$，$q(s)$ 分别为它们的右导函数.

对于定义于 G 上的可测函数 $u(t)$，其模为 $\rho_M(u)=\int_G M(u(t))dt$，由 $M(u)$ 生成的线性集 $L_M=\{u(t):\exists\ \lambda>0$ 使 $\rho_M(\lambda u)<\infty\}$，赋以 Luxemburg 范数：

$$\|u\|_{(M)}=\inf\{k>0:\int_G M(\frac{u(t)}{k})dt\leqslant 1\}$$

和赋以 Orlicz 范数：

$$\|u\|_M=\sup_{\rho_N(v)\leqslant 1}\int_G u(t)v(t)dt.$$

构成的两种范数的 Orlicz 函数空间分别记为

$$L_{(M)}\stackrel{\triangle}{=}(L_M;\|\cdot\|_{(M)})\text{ 与 }L_{(M)}\stackrel{\triangle}{=}(L_M;\|\cdot\|_M).$$

本文以 $S(L_{(M)})$ 与 $S(L_M)$ 表相应空间的单位球面.

对 $u\in L_M$，记

* 1993年10月18日收到. 国家自然科学基金及黑龙江省自然科学基金资助项目.

$$k^{*}=k^{*}(u)=\inf\{k>0:\int_{G}N[p(k|u(t)|]dt\geqslant 1\};$$

$$k^{**}=k^{**}(u)=\sup\{k>0:\int_{G}N[p(k|u(t)|]dt\leqslant 1\}.$$

[2]Th1.27 指出：当且仅当 $k\in[k^{*},k^{**}]$时

$$\|u\|_{M}=\frac{1}{k}(1+\int_{G}M(ku(t))dt)\quad(u\neq\theta).$$

设 $M(u)$为 N 函数，如果 M 在区间$[a,b]$上为仿射函数，并且对任意 $\varepsilon>0$，M 在$[a-\varepsilon,b]$或$[a,b+\varepsilon]$上都不是仿射的，则称$[a,b]$为 M 的仿射区间. 其中 a 为仿射区间的左端点，b 为右端点. 设$\{[a_i,b_i]\}_{i=1}^{\infty}$为 M 的构成仿射区间全体，则易见 $S_M\overset{\triangle}{=}R\setminus\{\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\}$ 为 $M(u)$的严格凸点的集合.

对任意 $u,v\in R$，$a\in(0,1)$，及 $au+(1-a)v\in S_M$，有

$$M(au+(1-a)v)<aM(u)+(1-a)M(v).$$

二 主要结果

定理 1 $x\in S(L_{(M)})$为端点的充分必要条件是 x 是 E_N-μ 点.

证明 充分性

由 [2] 中 Th2.1，x 为端点的充分必要条件是 $\rho_M(x)=1$ 和 $|x(t)|\in S_M$，(a.e). 设 $x\in S(L_{(M)})$，无碍于一般性，设 $x(t)\geqslant 0$.

如果 $\rho_M(x)=1$ 不成立，则 $\rho_M(x)<1$ 且对任何 $\lambda>0$，$\rho_M((1+\lambda)x)=\infty$. 取足够大的 $c>0$，使 $\mu G_c=\mu\{t\in G:x(t)\leqslant c\}>0$. 由于 $M(u)$在$[0,c]$上一致连续，存在足够小的 $\delta>0$ 满足

$$\int_{G_c}M(x(t)\pm\delta)dt+\int_{G\setminus G_c}M(x(t))dt<1.$$

由[2]中引理 2.4，取 G_c 的两列子集$\{E_n\}$，$\{F_n\}$满足 $\mu E_n=\mu F_n$，$E_n\cap F_n=\varnothing$，$E_n\cup F_n=G_c$ 且对任何可积函数 $y(t)$，

$$\int_{E_n}y(t)dt-\int_{F_n}y(t)dt\to 0(n\to\infty).$$

置 $x_n(t)=x(t)+\delta\chi_{E_n}(t)-\delta\chi_{F_n}(t)$. 则

$$\rho_M(x_n)=\int_{E_n}M(x(t)+\delta)dt+\int_{F_n}M(x(t)-\delta)dt+\int_{G\setminus G_c}M(x(t))dt<1.$$

且对任何 $\lambda>0$

$$\rho_M((1+\lambda)x_n)\geqslant\int_{G\setminus G_c}M((1+\lambda)X(t))dt=\infty.$$

这表明 $\|x_n\|_{(M)}=1(n=1,2,\cdots)$. 对任何 $y\in E_N$

$$\int_{G}(x_n(t)-x(t))y(t)dt=\delta(\int_{F_n}y(t)dt-\int_{E_n}y(t)dt)\to 0\ (n\to\infty).$$

即 $x_n\xrightarrow{E_N}x$. 又由 $\mu\{t\in G:|x_n(t)-X(t)|\geqslant\delta\}=\mu G_c>0$，故 $x_n\xrightarrow{\mu}X$ 不成立.

如果 $x(t)\in S_M$(a.e)不成立，则有 $M(u)$的仿射区间$[a,b]$使 $\mu\{t\in G:X(t)\in(a,b)\}>0$.

取 $\delta>0$ 充分小，使 $\mu G_0=\mu\{t\in G:X(t)\in[a+\delta,b-\delta]\}>0$.

取 G_0 的两列子集 $\{E_n\},\{F_n\}$ 满足 $\mu E_n=\mu F_n,E_n\cap F_n=\varnothing,E_n\cup F_n=G_0$ 且对任何可积函数 $y(t)$，有

$$\int_{E_n}y(t)dt-\int_{F_n}y(t)dt\to 0\ (n\to\infty).$$

置 $x_n(t)=x(t)+\delta\chi_{E_n}(t)-\delta\chi_{F_n}(t)$，则

$$\begin{aligned}\rho_M(x_n)&=\int_{G\setminus G_0}M(x(t))dt+\int_{E_n}M(x(t)+\delta)dt+\int_{F_n}M(x(t)-\delta)dt\\&=\int_{G\setminus G_0}M(x(t))dt+\int_{E_n}M(x(t))dt+p(a)\delta\mu E_n+\int_{F_n}M(x(t))dt-p(a)\delta\mu F_n\\&=\rho_M(X)=1,\end{aligned}$$

从而 $\|x_n\|_{(M)}=1(n=1,2,\cdots)$ 且对任何 $y(t)\in E_N$

$$\int_G(x_n(t)-x(t))y(t)dt=\delta(\int_{F_n}y(t)dt-\int_{E_n}y(t)dt)\to 0\ (n\to\infty).$$

即 $x_n\xrightarrow{E_N}x$. 但是 $\mu\{t\in G:|x_n(t)-x(t)|\geqslant\delta\}=\mu G_0>0$，故 $x_n\xrightarrow{\mu}x$ 不成立.

必要性 设 $x\in S(L_{(M)})$ 是端点(即 $\rho_M(x)=1,|x(t)|\in S_M$, a. e)又 $x_n\in S(L_{(M)}),x_N\xrightarrow{E_N}x$. 不妨设 $x_n(t)\geqslant 0$.

记 $E_m=\{t\in G:x(t)\leqslant m\},E_m^n=\{t\in E_m:x_n(t)\geqslant x(t)\}$，则

$$\begin{aligned}&\int_{E_m}(M(x_n(t))-M(x(t))dt\\&=\int_{E_m^n}(M(x_n(t)-M(x(t)))dt-\int_{E_m\setminus E_m^n}(M(x(t))-M(x_n(t)))dt\\&\geqslant\int_{E_m^n}(x_n(t)-x(t))p(x(t))dt-\int_{E_m\setminus E_m^n}(x(t)-x_n(t))p(x(t))dt\\&=\int_{E_m}(x_n(t)-x(t))p(x(t))dt\\&=\int_G(x_n(t)-x(t))p(x(t))\chi_{E_m}(t)dt\to 0(n\to\infty).\end{aligned}$$

这表明 $\liminf\limits_{n\to\infty}\int_{E_m}M(x_n(t))dt\geqslant\int_{E_m}M(x(t))dt$. 令 $m\to\infty$ 即得 $\liminf\limits_{n\to\infty}\rho_M(x_n)\geqslant\rho_M(x)=1$. 但由 $\rho_M(x_n)\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_M(x_n)=1$.

由于 $\frac{x_n+x}{2}\xrightarrow{E_N}x$，同理也有 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_M(\frac{x_n+x}{2})=1$.

从上述推理不难看出，对任何 $E\subset G$，恒有

$$\lim_{n\to\infty}\rho_M(x_n\chi_E)=\rho_M(x\chi_E).\tag{1}$$

记 $M(u)$ 的仿射区间端点全体为 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$，

$$G_i=\{t\in G:x(t)=r_i\}(i=1,2,\cdots),\ G_0=G\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i.$$

我们将证明 $x_n-x\xrightarrow{\mu}0$ 在每个 $G_i(i=0,1,2,\cdots)$ 上成立.

先证 $x_n - x \xrightarrow{\mu} 0$ 在 G_0 上成立. 如不然，可取 $\varepsilon>0,\sigma>0$ 满足

$$\mu\{t \in G_0: |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} \geqslant 6 \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由于

$$1 \geqslant \rho_M(x_n) \geqslant \int_{\{t\in G:|x_n(t)|\geqslant D\}} M(x_n(t))dt \geqslant M(D)\mu\{t \in G: |x_n(t)| \geqslant D\},$$

所以 $\lim\limits_{D\to\infty}\sup\limits_n \mu\{t \in G: |x_n(t)| \geqslant D\} = 0$. 取 D 充分大，使

$$\mu\{t \in G: |x_n(t)| > D\} < \frac{\sigma}{4}(n = 1,2,\cdots), \mu\{t \in G: |x(t)| > D\} < \frac{\sigma}{4}.$$

当 $t\in G_0$ 时，$x(t)\neq r_i(i=1,2,\cdots)$，所以 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\mu\{t\in G_0: x(t)\in(r_i-\varepsilon, r_i+\varepsilon)\}=0$，因而可选 $\varepsilon_i>0$ 使

$$\mu\bigcup_{i=1}^{\infty}\{t \in G_0: X(t) \in (r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)\} < \frac{\sigma}{4},$$

于是，若记 $e_n = \{t \in G_0: |X_n(t) - X(t)| \geqslant \varepsilon, 0 \leqslant X(t), X_n(t) \leqslant D, X(t) \in S_M \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)\}$，则 $\mu e_n > \frac{\sigma}{4}$，注意在集合

$$F = \{(u,v): |u - v| \geqslant \varepsilon, 0 \leqslant u, v \leqslant D, v \in S_M\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}(r_i - \varepsilon_i, r_i + \varepsilon_i)\}$$

上处处成立 $M(\frac{u+v}{2})<\frac{M(u)+M(v)}{2}$. 由于 F 是二维空间上有界闭集以及 $M(u)$ 的连续性，存在 $\delta: 0<\delta<1$，当 $(u,v)\in F$ 时 $M(\frac{u+v}{2}) \leqslant (1-\delta)\frac{M(u)+M(v)}{2}$，亦即当 $t\in e_n$ 时

$$M(\frac{x_n(t) + x(t)}{2}) \leqslant (1 - \delta)\frac{M(x_n(t)) + M(x(t))}{2}. \tag{2}$$

从而得到矛盾:

$$\begin{aligned} 0\leftarrow & \frac{\rho_M(x_n) + \rho_M(x)}{2} - \rho_M(\frac{x_n + X}{2}) \\ &= \int_G [\frac{M(x_n(t)) + M(x(t))}{2} - M(\frac{x_n(t) + x(t)}{2})]dt \\ &\geqslant \int_{e_n} [\frac{M(x_n(t)) + M(x(t))}{2} - M(\frac{x_n(t) + x(t)}{2})]dt \\ &\geqslant \int_{E_n} \delta\frac{M(x_n(t)) + M(x(t))}{2}dt \geqslant \frac{\delta}{2}M(\frac{\varepsilon}{2}) \cdot \frac{\sigma}{4}. \end{aligned}$$

现设 r_i 是 $M(u)$ 仿射区间右端点，但不是另一仿射区间左端点.

如果 $\mu\{t\in G_i: |x_n(t)-x(t)|\geqslant\varepsilon\}\geqslant\sigma$，则或者 $\mu\{t\in G: x_n(t)-x(t)\geqslant\varepsilon\}\geqslant\sigma$，或者 $\mu\{t\in G: x(t)-x_n(t)\geqslant\varepsilon\}\geqslant\sigma$. 如系后一种情形，联系

$$\int_{\{t\in G_i: x(t)\geqslant x_n(t)\}} [x(t) - x_n(t)]dt \geqslant \int_{\{t\in G_i: x(t)\geqslant x_n(t)+\varepsilon\}} [x(t) - x_n(t)]dt \geqslant \varepsilon \cdot \sigma,$$

以及

$$\int_{\{t\in G_i: x_n(t)> x(t)\}} [x_n(t) - x(t)]dt - \int_{\{t\in G_i: x(t)\geqslant x_n(t)\}} [x(t) - x_n(t)]dt$$

$$= \int_{G_i} [x_n(t) - x(t)]dt \to 0 (n \to \infty)$$

可知

$$\int_{\{t \in G_i : x_n(t) - x(t)\}} [x_n(t) - x(t)]dt \geqslant \varepsilon \cdot \sigma.$$

从而存在 $\varepsilon' > 0, \sigma' > 0$ 满足 $\mu\{t \in G_i : x_n(t) - x(t) \geqslant \varepsilon'\} \geqslant \sigma'$. 因此无碍一般性，可设 $\mu\{t \in G_i : x_n(t) - x(t) \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sigma$ 成立. 这样一来

$$\int_{G_i} [M(x_n(t)) - M(x(t))]dt = \int_{G_i(x_n \geqslant x+\varepsilon)} [M(x_n(t)) - M(x(t))]dt$$

$$+ \int_{G_i(x \leqslant x_n < x+\varepsilon)} [M(x_n(t)) - M(x(t))]dt + \int_{G_i(x_n < x)} [M(x_n(t)) - M(x(t))]dt$$

$$\geqslant \int_{G_i(x_n \geqslant X+\varepsilon)} [p(r_i)(x_n(t) - r_i) + \xi_i]dt + \int_{G_i(x \leqslant x_n < x+\varepsilon)} p(r_i)(x_n(t) - r_i)dt$$

$$- \int_{G_i(x_n < x)} p(r_i)(r_i - x_n(t))dt$$

$$\geqslant \int_{G_i} p(r_i)(x_n(t) - r_i)dt + \xi_i\sigma \to \xi_i\sigma (n \to \infty).$$

与(1)式矛盾.

若 r_i 是 $M(u)$ 仿射区间左端点，但不是另一仿射区间右端点的情形可同样讨论，得到 $x_n - x \xrightarrow{\mu} 0$ 在 G_i 上成立.

现设 r_i 同时是两个仿射区间的左、右端点，此时必有 $p_-(r_i) < p(r_i)$.

如果 $\mu\{t \in G_i : |x_n(t) - x(t)| \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sigma$，不妨设为 $\mu\{t \in G_i : x_n(t) - r_i \geqslant \varepsilon\} \geqslant \sigma/2$. 于是

$$\int_{G_i} [M(x_n(t) - M(x(t))]dt$$

$$= \int_{G_i(x_n \geqslant r_i+\varepsilon)} + \int_{G_i(r_i+\varepsilon > x_n \geqslant r_i)} + \int_{G_i(x_n < r_i} [M(x_n(t) - M(x(t))]dt$$

$$\geqslant \int_{G_i(x_n \geqslant r_i+\varepsilon)} p(r_i)(x_n(t) - r_i)dt + \int_{G_i(r_i+\varepsilon) > x_n \geqslant r_i} p(r_i)(x_n(t) - r_i)dt$$

$$- \int_{G_i(x_n < r_i)} p_-(r_i)(r_i - x_n(t))dt$$

$$\geqslant \int_{G_i(x_n \geqslant r_i+\varepsilon)} [p(r_i) - p_-(r_i)](x_n(t) - x(t))dt + \int_{G_i} p_-(r_i)(x_n(t) - r_i)dt$$

$$\geqslant (p(r_i) - p_-(r_i))\varepsilon \frac{\sigma}{2} + \int_{G_i} p_-(r_i)(x_n(t) - r_i)dt \to (p(r_i) - p_-(r_i)) \frac{\varepsilon \cdot \sigma}{2}.$$

又与(1)式矛盾.

综上所述，$x_n - x \xrightarrow{\mu} 0$ 在整个 G 上成立.

定理2 $x\in S(L_M)$为单位球端点的充要条件是,x 是 E_N-μ 点.

证明 充分性

由[2]Th2.3,x 是端点当且仅当对 $k\in[k_x^*,k_x^{**}]$,$k|x(t)|\in S_M$(a.e).

如 x 不是端点,则有 $M(u)$的仿射区间$[a,b]$及 $\delta>0$ 使

$$\mu G_0=\mu\{t\in G:kx(t)\in[a+\delta,b-\delta]\}>0.$$

取 G_0 的两列子集$\{E_n\}$,$\{F_n\}$,满足 $\mu E_n=\mu F_n$,$E_n\cap F_n=\varnothing$,$E_n\cap F_n=G_0$,对任何可积函数 $y(t)$,$\int_{E_n}y(t)dt-\int_{F_n}y(t)dt\to 0(n\to\infty)$. 置 $x_n(t)=x(t)+\frac{\delta}{2k}(\chi_{E_n}(t)-\chi_{F_n}(t)$,则 $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\rho_N(p((1+\lambda)kx_n)&=\int_{G_0}N(p(\bar{a}))dt+\int_{G\setminus G_0}N(p(1+\lambda)kx(t)))dt\\&=\rho_N(p(1+\lambda)kx))\geqslant 1\end{aligned}$$

同理,$\rho_N(p((1-\lambda)kx_n)))\leqslant 1$,故 $k\in[k_{x_n}^*,k_{x_n}^{**}]$,于是

$$\begin{aligned}\|x_n\|&=\frac{1}{k}(1+\rho_M(kx_n))\\&=\frac{1}{k}(1+\int_{E_n}M(kx(t)+\frac{\delta}{2})dt+\int_{F_n}M(kx(t)-\frac{\delta}{2})dt+\int_{G\setminus G_0}M(kx(t))dt\\&=\frac{1}{k}(1+\int_{E_n}M(kx(t))dt+p(a)\frac{\delta}{2}\mu E_n+\int_{F_n}M(kx(t))dt-p(a)\frac{\delta}{2}\mu F_n+\int_{G\setminus G_0}M(kx(t))dt)\\&=\frac{1}{k}(1+\rho_M(kx))=\|x\|_M=1.\end{aligned}$$

对任何 $y\in E_N$,

$$\int_G(x_n(t)-x(t))y(t)dt=\frac{\delta}{k}(\int_{E_n}y(t)dt-\int_{F_n}y(t)dt)\to 0(n\to\infty).$$

但是 $\mu\{t\in G:|x_n(t)-x(t)|\geqslant\frac{\delta}{k}\}=\mu G_0>0$,即 $x_n-x\xrightarrow{\mu}0$ 不成立. 与 x 是 E_N-μ 矛盾.

必要性 设 x 是端点,(即 $kx(t)\in S_M$ a.e),$1=\|x_n\|_M=\frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n))$,$x_n\xrightarrow{E_N}x$. 为证 $x_n-x\xrightarrow{\mu}0$ 分以下五个步骤.

I 证明

$$\sup_n k_n=\bar{k}<\infty,\tag{3}$$

$$\lim_{\mu e\to 0}\sup\rho_M(k_nx_n\chi_e)=0.\tag{4}$$

若 $\{k_n\}$ 无界,不妨设 $k_n\to\infty$. 因 $x_n\xrightarrow{E_N}x\neq 0$,故 $x_n\not\xrightarrow{\mu}0$,即存在 $\delta,\sigma<0$ 使 $\mu e_n=\mu\{t\in G:|X_n(t)|\geqslant\delta\}\geqslant\sigma$. 这样一来得到矛盾:

$$1=\|x_n\|_M=\frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n))>\frac{1}{k_n}\int_{e_n}M(k_nx_n(t))dt>\frac{1}{k_n}M(k_n\delta)\cdot\sigma\to\infty.$$

若$\lim\limits_{\mu e\to 0}\sup\rho_M(k_nx_n\chi_e)=0$ 不真,则有 $e_n:\mu e_n<\frac{1}{2^n}$,及 $\varepsilon>0$ 满足 $\rho_M(k_nx_n\chi_{e_n})\geqslant\varepsilon(n=1,2,\cdots)$.

取正整数 m，使当 $\mu e<\frac{1}{2^m}$ 时，$\|x\chi_{G\setminus e}\|_M\geqslant\|x\|_M-\frac{\varepsilon}{2k}=1-\frac{\varepsilon}{2k}$.

于是因 $\mu(\bigcup_{n>m}e_n)<\frac{1}{2^m}$，$\|x\chi_{G\setminus\bigcup_{n>m}e_n}\|_M>1-\frac{\varepsilon}{2k}$，当 $n>m$ 时

$$1=\|x_n\|_M=\frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n))\geqslant\frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n\chi_{G\setminus\bigcup_{n>m}e_n})+\rho_M(k_nx_n\chi_{e_n})]$$

$$\geqslant\|x_n\chi_{G\setminus\bigcup_{n>m}e_n}\|_M+\frac{\varepsilon}{k}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$\overline{\lim_n}\|x_n\chi_{G\setminus\bigcup_{n>m}e_n}\|\geqslant\|x\chi_{G\setminus\bigcup_{n>m}e_n}\|_M>1-\frac{\varepsilon}{2k}$，从而得矛盾：

$$1>1-\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{k}=1+\frac{\varepsilon}{2k}.$$

记 $M(u)$ 的仿射区间端点全体为 $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$，$G_i=\{t\in G:kx(t)=r_i\}$，$G_0=G\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i$.

I　证明在 G_0 上 $k_nx_n-kx\xrightarrow{\mu}0$.

若有 $\varepsilon,\sigma>0$，使 $\mu\{t\in G_0:|k_nx_n(t)-kx(t)|\geqslant\varepsilon\}\geqslant\sigma$，仿定理 1 必要性之证，取 $D>0$ 和 $\varepsilon_i>0(i=1,2,\cdots)$，使 $E_n=\{t\in G:|k_nx_n(t)-kx(t)|\geqslant\varepsilon,|k_nx_n(t)|,|kx(t)|\leqslant D,kx(t)\in S_M\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}(r_i-\varepsilon;r_i+\varepsilon_i)\}$ 的测度大于 $\frac{\sigma}{4}$. 联系 $0<\frac{1}{1+\bar{k}}\leqslant\frac{k_n}{k_n+k},\frac{k_n}{k_n+k}\leqslant\frac{\bar{k}}{1+\bar{k}}<\infty$ 易知存在 $\delta>0$，当 $t\in E_n$ 时，

$$M(\frac{kk_n}{k+k_n}(x_n(t)+x(t)))\leqslant(1-\delta)(\frac{k}{k_n+k}M(k_nx_n(t))+\frac{k_n}{k_n+k}M(kx(t))).$$

又从 $x_n\xrightarrow{E_N}x$，立刻推得 $\|x_n+x\|_M\to2$，这样就得到矛盾：

$$0\leftarrow\|x_n\|_M+\|x\|_M-\|x_n+x\|_M$$

$$=\frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n))+\frac{1}{k}(1+\rho_M(kx))-\frac{k+k_n}{kk_n}(1+\rho_M(\frac{kk_n}{k+k_n}(X_n+x)))$$

$$=\frac{k+k_n}{kk_n}\int_G[\frac{k}{k+k_n}M(k_nx_n(t))+\frac{k_n}{k+k_n}M(kx(t))-M(\frac{kk_n}{k+k_n}(x_n(t)+X(t)))]dt$$

$$>\frac{k+k_n}{kk_n}\int_{E_n}[\frac{k}{k+k_n}M(k_nx_n(t))+\frac{k_n}{k+k_n}M(kx(t))-M(\frac{kk_n}{k+k_n}(x_n(t)+x(t)))]dt$$

$$>\frac{k+k_n}{kk_n}\int_{E_n}\delta(\frac{k}{k+k_n}M(k_nx_n(t))+\frac{k_n}{k+k_n}M(kx(t))dt\geqslant\frac{\delta}{k}M(\frac{\varepsilon}{2})\cdot\frac{\sigma}{4}.$$

II　证明 $\lim_{n\to\infty}k_n=k$ 以及对任何 $E\subset G$ 有

$$\lim_{n\to\infty}\rho_M(k_nx_n\chi_n)=\rho_M(kx\chi_E)\tag{5}$$

如果 $x\chi_{G_0}\neq0$，则由 $k_nx_n\xrightarrow{\mu}kx$ 推得 $k_nx_n\xrightarrow{E_N}kx$，由 $(k_n-k)x\chi_{G_0}=(k_nx_n-kx)\chi_{G_0}+k_n(x-x_n)\chi_{G_0}\xrightarrow{E_N}0$ 立刻推得 $k_n\to k$.

如果 $x\chi_{G_0}=0$，则 $x(t)=\sum_{i=1}^{\infty}x(t)\chi_{G_i}(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{r_i}{k}\chi_{G_i}(t)$. 因 $\{k_i\}$ 有界，设 $k_i\to k_0$ 援用 Jensen 不等式

$$1=\|x_n\|_M=\frac{1}{k_n}(1+\rho_M(k_nx_n))\geqslant\frac{1}{k_n}(1+\sum_{i=1}^{\infty}\int_{G_i}M(k_nx_n(t))dt)$$

$$\geqslant \frac{1}{k_n}(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(\frac{1}{\mu G_i}\int_{G_i}k_n x_n(t)dt)\mu G_i).$$

联系 $\int_{G_i}x_n(t)dt\to\int_{G_i}X(t)dt=\frac{r_i}{k}\mu G_i$ 及(4)式，令 $n\to\infty$

$$1\geqslant\frac{1}{k_0}(1+\sum_{i=1}^{\infty}M(k_0\frac{r_i}{k})\mu G_i)=\frac{1}{k_0}(1+\rho_M(k_0x))\geqslant\|x\|_M=1.$$

这表明 $\frac{1}{k_0}(1+\rho_M(k_0x))=1$，因 x 是端点，$[k_x^*,k_x^{**}]$ 是 singleton，故 $k_0=k$. 即 $k_n\to k$ 成立. 从而 $x_n\xrightarrow{\mu}x$ 在 G_0 上成立.

为证 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho_M(k_nx_n\chi_E)=\rho_M(kx\chi_E)$. 由(4)式，不妨设 $t\in E$ 时 $\{x(t)\}$ 有界.

$$\begin{aligned}&\int_E(M(k_nx_n(t))-M(kx(t))dt\\&=\int_{E(k_nx_n\in kx)}(M(k_nx_n(t))-M(kx(t)))dt-\int_{E(k_nx_n<kx)}(M(kx(t))-M(k_nx_n(t)))dt\\&\geqslant\int_{E(k_nx_n\geqslant kx)}p(kx(t))(k_nx_n(t)-kx(t))dt-\int_{E(k_nx_n<kx)}p(kx(t))(kx(t)-k_nx_n(t))dt\\&=\int_E p(kx(t))(k_nx_n(t)-kx(t))dt\\&=\int_G(k_nx_n(t)-kx(t))p(kx(t))\operatorname{sign}\chi_E(t)dt.\end{aligned}$$

因已证 $k_n\to k$，故 $k_nx_n\xrightarrow{E_N}kx$. $p(kx)\operatorname{sign}\chi_E\in E_N$，所以 $n\to\infty$ 时 $\lim\inf\rho_M(k_nx_n\chi_E)\geqslant\rho_M(kx\chi_E)$. 此不等式对每一集 $E\subset G$ 均成立. 如对某一集 E 成立大于号，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\rho_M(k_nx_n\chi_E)=\rho_M(kx\chi_E)+\delta$，此处 $\delta>0$，则推出矛盾：

$$k-1=\rho_M(kx)\leqslant\lim_{n\to\infty}\inf\rho_M(k_nx_n)-\delta=\lim_{n\to\infty}\inf(k_n-1-\delta=k-1-\delta.$$

故(5)式为真.

Ⅳ 设 r_i 是 $M(u)$ 仿射区间右(左)端点，但不是另一仿射区间左(右)端点时，$x\xrightarrow{\mu}x$ 在 G_i 上成立.

记 $F_n=\{t\in G_i:x_n(t)\geqslant x(t)\}$. 如果 $\int_{F_n}(x_n(t)-x(t))dt\nrightarrow 0$，则由 $k_n\to k$ 可知 $\int_{F_n}(k_nx_n(t)-kx(t))dt\to 0$. 从而易知存在 $\varepsilon,\sigma>0$ 使 $\mu\{t\in G_i:k_nx_n(t)-kx(t)\geqslant\varepsilon\}\geqslant\sigma$. 考虑到 $kx(t)=r_i$ 不是 $M(u)$ 仿射区间左(右)端点，完全仿第二步之证，即可得到矛盾，故 $\int_{F_n}(x_n(t)-x(t))dt\to 0$，再从 $\int_{G_i}(x_n(t)-x(t))dt\to 0$ 得到 $\int_{G_i\setminus F_n}(x_n(t)-x(t))dt\to 0$，这表明 $\int_{G_i}|x_n(t)-x(t)|dt\to 0$，即 $x_n\xrightarrow{\mu}x$ 在 G_i 上成立.

Ⅴ 证 r_i 是 $M(u)$ 仿射区间左端点又是另一仿射区间右端点时，$x_n\xrightarrow{\mu}x$ 在 G_i 上成立.

此时必有 $p_-(r_i)<p(r_i)$，取 β,δ 使

$$p_{-}(r_i) = \beta - \delta < \beta < \beta + \delta = p(r_i). \tag{6}$$

联系 $\rho_M(k_n x_n \chi_{G_i}) \to \rho_M(kx\chi_{G_i})$以及 $\int_{G_i} k_n x_n(t)dt \to \int_{G_i} kx(t)dt$,有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{G_i}[M(k_n x_n(t)) + N(\beta) - \beta k_n x_n(t)]dt = \int_{G_i}[M(kx(t) + N(\beta) - \beta kx(t)]dt$$

$$= \int_{G_i}[M(r_i) + N(\beta) - r_i\beta]dt = 0,$$

故对任何 $e_n \subset G_i$, $\int_{e_n}[M(k_n x_n(t)) + N(\beta) - \beta k_n x_n(t)]dt \to 0(n \to \infty)$.

若 $\mu\{t \in G_i : x_n(t) > x(t) + \varepsilon\} \geqslant \sigma$,则对充分大的 n 有

$$\mu e_n = \mu\{t \in G_i : k_n x_n(t) > kx(t) + \varepsilon\} \geqslant \sigma.$$

这就得到矛盾:$0 \leftarrow \int_{e_n}[M(k_n X_n(t)) + N(\beta) - \beta k_n X_n(t)]dt \geqslant \int_{e_n}(k_n X_n(t) - r_i)\delta dt > \varepsilon\sigma\delta$.

同理,如果 $\mu\{t \in G_i : X_n(t) \leqslant x(t) - \varepsilon\} \geqslant \sigma$,也将导致矛盾.

综上所述,$x_n \xrightarrow{\mu} x$ 在整个 G 上成立.

参 考 文 献

[1] M.A.Krasnoselskii, Ya,B.Rutiskii, 凸函数与Orlicz空间, 11958, Moscow. 吴从炘译, 1962.

[2] 吴从炘、王廷辅、陈述涛、王玉文, Orlicz空间几何理论, 黑龙江科技出版社, 1986.

A Characterization of Extreme Points in Orlicz Function Spaces

Tian Shen *Wang Tingfu* *Wang Quandi*

(Harbin Univ. Sci. & Tech., Harbin 150080)

Abstract

In this paper, we give a new criterion of extreme points in $S(L_{(m)})$ and $S(L_m)$:

$x \in S(L_{(m)})$ or $S(L_m)$ is an extreme points if and only if x is an $E_n - \mu$ points. i.e.,

$\|x_n\| = 1$ and $x_n \xrightarrow{E_N} x$ imply $x_n \xrightarrow{\mu} x$.

Keywords Orlicz spaces, extreme points, $E_N - \mu$ points.