第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

关于完全单 Γ-半群*

杨国为 朱 平
(青岛大学师范学院数学系，266071) (安徽巢湖师专数学系，238000)

摘 要 本文给出了单 Γ-半群、完全单 Γ-半群的实质刻画，揭示了单 Γ-半群、完全单 Γ-半群的单性，完全单性由它们的任一个相关半群决定的性质.

关键词 Γ-半群，相关半群.
分类号 AMS(1991) 20M/CCL O152

§1 引 言

设 M,Γ 是两非空集合. M 称为 Γ-半群[1]，如果对所有 $a,b,c\in M$，$\alpha,\beta\in\Gamma$，成立(i) $a\alpha b\in M$，(ii) $(a\alpha b)\beta c=a\alpha(b\beta c)$. 自 1986 年 Sen. M. K 和 Saha. N. K 引入 Γ-半群概念以来，Γ-半群的研究工作不断发展，已经获得许多重要结果. Sen. M. K 在[1]中发现 Γ-半群 M 有一个相关半群是群，则其它相关半群必定是群. 显然这个结果与 Γ-半群的整体结合律密切相关. 人们自然要问 Γ-半群的整体结合律多大程度地影响着 Γ-半群中相关半群之间的关系？本文针对完全单 Γ-半群对上述问题展开了讨论，获得了完全单 Γ-半群的刻画等结果. 下面文中概念，记号均参见[2].

§2 主要结果

引理 1 设 M 是 Γ-半群，$a,b\in M$，$\alpha,\beta\in\Gamma$. 若 $a=a\alpha b\beta a$，则 $(a)_r=a\alpha M$，$(a)_l=M\beta a$，$(a)=M\beta a\alpha M$.

本引理和下面的引理证明是初等的，这里一概略去.

引理 2 设 M 是 Γ-半群，$\alpha\in\Gamma$. 若 M_α 是正则的，则 $J_a^\alpha={}_\Gamma J_a$，$L_a^\alpha={}_\Gamma L_a$，$R_a^\alpha={}_\Gamma R_a$，$H_a^\alpha={}_\Gamma H_a$，$D_a^\alpha={}_\Gamma D_a$，其中 $J_a^\alpha,L_a^\alpha,R_a^\alpha,H_a^\alpha,D_a^\alpha$ 为 M_α 中含元 a 的 green 关系类. ${}_\Gamma J_a,{}_\Gamma L_a,{}_\Gamma R_a,{}_\Gamma H_a,{}_\Gamma D_a$ 为 M 的含元 a 的 green 关系类.

定理 1 设 M 是 Γ-半群，则下列五款等价：

(1) M 是单 Γ-半群

(2) 任意 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是单的.

(3) 存在一个 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是单的.

* 1993年1月3日收到. 95年8月7日收到修改稿. 国家自然科学基金资助课题.

(4) 对任意 $\alpha,\beta\in\Gamma$，任意 $a\in M$，$(M\alpha a)\beta M=M$.

(5) 对任意 $a\in M$，$(M\Gamma a)\Gamma M=M$.

证明 (1)⇔(5)：见[2]的引理 2.3.

(1)⇒(2)：对任意 $\alpha\in\Gamma$，$a\in M$，$M\alpha a\alpha M$ 是 M 的理想，因此由 M 的单性知 $M\alpha a\alpha M=M$，即 M_α 为单的.

(2)⇒(3)：显然.

(3)⇒(4)：设有 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是单的. 对任意 $\gamma,\beta\in\Gamma$，$a\in M$，由于

$$(M\gamma a\beta M)\alpha M = M\gamma a\beta(M\alpha M)\subseteq M\gamma a\beta M,\quad M\alpha(M\gamma a\beta M)\subseteq M\gamma a\beta M,$$

所以 $M\gamma a\beta M$ 为 M_α 的理想. 于是 M_α 的单性得 $M\gamma a\beta M=M$.

(4)⇒(1)：设 A 为 M 的含元 a 的理想，则对任意 $\alpha,\beta\in\Gamma$，$A\supseteq M\alpha a$，$a\beta M$，$A\supseteq A\Gamma M\supseteq(M\alpha a)\Gamma M\supseteq(M\alpha a)\beta M=M$. 从而 M 为单 Γ-半群.

定理 2 设 M 是 Γ-半群，则下列四款等价：

(1) M 是完全单的 Γ-半群.

(2) 关于任意 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是完全单的.

(3) 存在 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是完全单的.

(4) 存在 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是正则的，且 M_α 的每个幂等元极小.

证明 (1)⇒(2)：由[6]知，只要证对任意的 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是正则的，且它的每个幂等元极小.

先证对任意 $a\in M_\alpha$，a 在 M_α 中是正则的.

由于 M 是完全单 Γ-半群，因此 M 是单的，且存在 $\beta\in\Gamma$，$e\in M$，使 $e\beta e=e$ 极小. 因为 M 是单 Γ-半群，由定理 1 有 $M\alpha a\alpha M=M\beta a\beta M=M\beta e\beta M$. 于是存在 $c,d,c_2,d_2\in M$，使 $a=c\beta e\beta d$，$e=c_2\alpha a\alpha d_2$，从而 $a=c\beta e\beta d=c\beta e\beta e\beta d=c\beta e\beta e\beta e\beta d=c_1\beta e\beta d_1$，其中 $c_1=c\beta e$，$d_1=e\beta d$. $e=e\beta e\beta e=e\beta c_2\alpha a\alpha d_2\beta e=c_3\alpha a\alpha d_3$，其中 $c_3=e\beta c_2$，$d_3=d_2\beta e$.

令 $f=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1$，则

$$\begin{aligned}f\beta f&=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\beta d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c\beta e\beta e\beta d\,\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\\&=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c\beta e\beta d\,\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha a\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\\&=d_1\alpha d_3\beta e\beta c_3\alpha c_1=d_1\alpha d_2\beta e\beta c_3\alpha c_1=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1=f,\end{aligned}$$

即 f 为 β-幂等元. 而且 $f\beta e=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\beta e=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c\beta e\beta e=d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1=f$，$e\beta f=f$. 因此 $e\beta e=e$，$f\beta f=f$，$e\beta f=f\beta e=f$，即 $f\omega e$. 由 e 的极小性知 $e=f$. 于是

$$\begin{aligned}a&=c_1\beta e\beta d_1=c_1\beta f\beta d_1=c_1\beta d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\beta d_1=c\beta e\beta e\beta d\,\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\beta d_1=c\beta e\beta d_1\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\beta d_1\\&=a\alpha d_3\beta c_3\alpha c_1\beta d_1=a\alpha d_3\beta c_3\alpha c\beta e\beta ed=a\alpha d_3\beta c_3\alpha c\beta e\beta d=a\alpha d_3\beta c_3\alpha a=a\alpha b\alpha a,\end{aligned}$$

其中 $b=d_3\beta c_3\in M$. 故 a 在 M_α 中正则，再由 a 的任意性知 M_α 是正则的.

由[2]的引理 2.4 知，M_α 中任意幂等元极小，因而(2)成立.

(2)⇒(3)和(3)⇒(4)显然

(4)⇒(1)：设 $\alpha\in\Gamma$，M_α 是正则半群，且 M_α 的每个幂等元极小. 由[6]知，M_α 是完全单的. 于是定理 1 表明 M 是单 Γ-半群. 要证 M 为完全单 Γ-半群，只需证 M 含有一个极小幂等元.

因为 M_α 是完全单的，因此必含幂等元 e，$e\alpha e=e$，e 在 M_α 中极小. 下证 e 在 Γ-半群 M 中也极小.

设 $f\in M$，$\beta\in\Gamma$，$f\beta f=f$，使 $f\omega e$，而 $f=f\beta e=e\alpha f$. 那么 $f\alpha f=f\beta e\alpha f=f\beta f=f$. 而且 $f\alpha e=$

$f\beta e\alpha e=f\beta e=f=e\alpha f$. 于是 $f\omega e$，由 e 在 M_α 中极小性得 $f=e$. 这也说明 e 在 M 中是极小元.

推论 1 设 M 为 Γ-半群，$\alpha\in\Gamma$. 若 M_α 为群并，且单，则 M 为完全单 Γ-半群.

推论 2 设 M 为完全单 Γ-半群，则 M 为 Γ-群并.

注 定理 2 给出了完全单 Γ-半群的若干特征，下例说明 Γ-群并没有类似特征.

例 设 $M=\{0,1\}$，$\Gamma=\{\alpha,\beta\}$，定义运算：

α	0	1
0	0	0
1	0	1

β	0	1
0	0	0
1	0	0

则 M 为 Γ-半群. 而 M_α 为群并，M_β 不是群并，M 不是 Γ-群并.

有了定理 2 及引理 2 易得：

定理 3[4] M 为 Γ-群并当且仅当 M 是完全单 Γ-半群的半格.

定理 4[5] 设 M 是 Γ-群并，则 ${}_\Gamma J$ 是 M 的最小半格同余.

利用上面定理及引理还可推出 Clifford Γ-半群的有关结果[5].

参 考 文 献

[1] M. K. Sen and N. K. Saha., *On Γ-semigroup-I*, Bull. Cal. Math. Soc., 78(1986), 180—186.

[2] N. K. Saha, *On Γ-Semigroup-Ⅱ*, Bull. Cal. Math. Soc., 80(1988), 1—12.

[3] A. Seth., *Rees's Theorem for Γ-semigroup*, Bull. Cal. Math. Soc., 81(1989), 217—226.

[4] 盛德成、赵宪钟，Γ-群并的若干特征，待发.

[5] S. Decheng, *On Union of Γ-group*, Proceeding of the Second International Colloquium on Words, Languages and Combinatorics, 1992.

[6] J. M. Howie, *An Introduction to Semigroup*, Theorem Academic Press, London New York San Francisco, 1976, P71.