第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 15 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

关于C_0半群的渐近展开*

张宏伟　呼青英　朱广田
(郑州粮食学院基础部，河南 464000)　(中国科学院系统所，北京 100080)

摘　要　本文得到具有实际背景的一类C_0半群的渐近展开,它仅要求予解式满足一定条件.

关键词　C_0半群,渐近展开,予解式.
分类号　AMS(1991) 47D05/CCL O177.1

设E为Banach空间,A为E上具稠定义域$D(A)$的线性算子,则抽象Cauchy问题$\dot{u}(t)=Au(t),u(0)=x\in D(A)$有唯一解$u\in C^1([0,\infty),E)$,当且仅当$A$为强连续$C_0$半群$T(t)$的生成元[3].这时方程的解可表示为$u(\cdot)=T(\cdot)x$,这只是一种形式上的表示,从应用的观点看,感兴趣的也往往不在于$u(t)$的完善表达,而在于对甚大的t,解$u(t)$将呈现怎样的状态,或者说解关于时间的渐近性态,确切地说就是当$t\to\infty$时解$T(t)x$是否趋于0以及其速度如何,这实质上也是C_0半群的渐近展开问题.熟知C_0半群的渐近表示有Yosida型表示,Post-widder逆公式表示,Phragemen渐近表示以及常用的Laplace逆变换公式[1,2,3],然而半群的这些渐近表示却不能直接用来予测当$t\to\infty$时的渐近性态,当然也就没有抽象Cauchy问题解的渐近行为.从实用目的看,常常希望从生成元A的谱情况来直接予期$T(t)x$的渐近行为.在这方面一些特殊情况已经给出[2,3],例如(i)A为有界算子,(ii)$T(t)$对$t>0$为解析半群,(iii)$T(t)$对$t\geqslant t_0$为可微半群,(iv)$T(t)$对$t\geqslant t_0>0$在算子范数意义下连续,(v)$T(t)$为紧或拟紧半群,(vi)E为Hilbert空间,A为正规算子,(vii)A为正算子,$E=C_0(X)$,X局部紧或者$E=L^p(\Omega)$,其中$1\leqslant p\leqslant\infty$.上面这些半群均有谱确定增长阶成立,即$w_0=s(A)=\sup\{\mathrm{Re}\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}$.从而有半群的渐近展开,$T(t)x=e^{s(A)t}Px+R(t)x$,其中$P$为某一投影算子,$\|R(t)\|\leqslant C\exp((\varepsilon+s(A))t)$.然而对许多实际问题$A$所生成的半群往往不满足上面这些性质,本文给出更广泛的一类C_0半群的渐近展开,它包括了上面所给出的几种类型.这种展开表明当$t\to\infty$时对$T(t)$的性态起决定作用的是A的谱分布情况,这种展开可以用来直接予期当$t\to\infty$时$T(t)x$的渐近性态.这种半群有具体的实际背景,如人口算子半群,中子迁移算子半群均属此类型,其特点是生成元A的谱在复平面上某一直线右侧有可数个离散本征值.我们的条件仅仅要求$x\in D(A^2)$且予解式满足一定条件,这种条件比前面任何一种都要弱,而且对实际问题我们常常得到的也是关于予解式的信息,因而更加实用.特别地,当A作用的空间为$L^p(\Omega)$时,这里$1<p<\infty$,这些条件可进一步削弱为予解式在平行于虚轴的直线上一致有界.本文最后将给出

* 1993年6月26日收到.

一个简单的例子.

文中记 E 为 Banach 空间,A 为强连续 C_0 半群 $T(t)$ 的生成元,$\rho(A)$,$\sigma(A)$ 分别表示 A 的予解集和谱集.

定理 1 设 $T(t)$ 是 Banach 空间 E 上的 C_0 半群,生成元为 A,在复平面 C 上有一直线 $\mathrm{Re}\lambda=\beta_0$,在其右侧除可数个有限重离散本征值外均为 A 的予解集,且这些本征值可按实部从大到小依次排序为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$,对 $x\in D(A^2)$ 和任意实数 $\sigma\geqslant\beta_0$ 关于 σ 一致地有

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\|R(\sigma+i\tau,A)x\|=0,$$

则

$$T(t)x=\sum_{n=1}^{m}T_n(t)x+R_m(t)x,$$

其中 $T_n(t)x=\mathrm{Res}(\exp(\lambda t),R(\lambda,A)x)|\lambda=\lambda_n$ 表示 $\exp(\lambda t)R(\lambda,A)x$ 在 $\lambda=\lambda_n$ 处的残数,$\|R_m(t)\|\leqslant C\exp((\varepsilon+\mathrm{Re}\lambda_m)t)$,$t\geqslant 0$,这里 $\varepsilon>0$,且 $\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon>\mathrm{Re}\lambda_{m+1}$,$C=C_{(\varepsilon,m)}$ 为一常数.

证明 由半群性质存在 $M\geqslant 1$ 和 $w>0$ 有 $\|T(t)\|\leqslant Me^{wt}$,由[3]当 $x\in D(A^2)$ 时有

$$T(t)x=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda,\tag{1}$$

其中 $r>\max\{0,w\}$,由半群阶 w 和 A 的谱关系知 $w>\mathrm{Re}\lambda_n$,从而 $r>\mathrm{Re}\lambda_n$,$n=1,2,\cdots$,选取实数 β_1,τ_1 满足

$$\mathrm{Re}\lambda_{m+1}<\beta_1<\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon,\ \tau_1>\max\{|\mathrm{Im}\lambda_1|,|\mathrm{Im}\lambda_2|,\cdots|\mathrm{Im}\lambda_m|\}>0.$$

构作由 $\mathrm{Re}\lambda=r$,$\mathrm{Re}\lambda=\beta_1$,$\mathrm{Im}\lambda=\tau$,其中 $\tau>\tau_1$,组成的矩形 R_1,则由 Cauchy 定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_1}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda=\sum_{n=1}^{m}T_n(t)x,\tag{2}$$

其中 $T_n(t)x=\mathrm{Res}(e^{\lambda t}R(\lambda,A)x)|\lambda=\lambda_n$ 表示 $e^{\lambda t}R(\lambda,A)x$ 在 $\lambda=\lambda_n$ 处的残数.

另一方面

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_1}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{r-i\tau}^{r+i\tau}+\int_{r+i\tau}^{\beta_1+i\tau}+\int_{\beta_1+i\tau}^{\beta_1-i\tau}+\int_{\beta_1-i\tau}^{r-i\tau}\Big)\cdot e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda,\tag{3}$$

由假设知 $\|R(\lambda,A)x\|$ 在区域 $\{\lambda:\beta_2\leqslant\mathrm{Re}\lambda\leqslant r_1,|\tau|>\tau_1\}$ 上一致有界,记 $\|R(\lambda,A)x\|\leqslant C_1(x)$,$C_1(x)$ 为与 x 有关的常数.又由 $\lambda R(\lambda,A)x=x+R(\lambda,A)Ax$,$x\in D(A)$,则

$$\|R(\lambda,A)x\|<\frac{C_2(x)}{|\lambda|}<\frac{C_2(x)}{|\tau|},\tag{4}$$

其中 $C_2(x)$ 为仅与 x 有关的常数.于是

$$\lim_{\tau\to\infty}\Big(\int_{r+i\tau}^{\beta_1+i\tau}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda+\int_{\beta-i\tau}^{r-i\tau}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda\Big)=0.\tag{5}$$

从而当 $|\tau|\to\infty$ 时,结合(1),(2),(3),(5)有

$$T(t)x=\sum_{n=1}^{m}T_n(t)x+\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty}e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda.$$

下面来估计最后一项,因 $x\in D(A^2)$,由(4)以及

$$R(\lambda,A)x=\frac{x}{\lambda}+\frac{R(\lambda,A)Ax}{\lambda},$$

则 $\| R(\lambda,A)Ax \| < \frac{C_3(x)}{|\lambda|}$，其中 $C_3(x)$ 为与 λ 无关仅与 x 有关的常数，从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}x\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta_1+i\infty}\frac{e^{\lambda t}R(\lambda,A)Ax}{\lambda}d\lambda.$$

注意到当 $t\to\infty$ 时有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\tau t}}{\sqrt{\beta_1^2+\tau^2}}d\tau = 0,$$

则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda = 0,$$

故有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda = O(e^{\beta_1 t}).$$

又因 $\beta_1 < \mathrm{Re}\lambda_m - \varepsilon$，故积分更应有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta_1-i\infty}^{\beta_1+i\infty} e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda = O(\exp(\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon)t).$$

从而定理得证.

注 1　定理中残数也可写成

$$T_n(t)x = \mathrm{Res}(e^{\lambda t}R(\lambda,A)x)|_{\lambda=\lambda_n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n} e^{\lambda t}R(\lambda,A)x\,d\lambda,$$

其中 Γ_n 为以 λ_n 为中心，Γ_n 内及 Γ_n 上均不含其它谱点的圆. 若记 B_n 为 A 相应于 λ_n 的投影算子，则 $T_n(t)x = e^{\lambda_n t}B_n x, t\geqslant 0$. 若 λ_n 的代数重数为 $K(n)$，对应的残数为 P_n，则

$$T_n(t)x = e^{\lambda_n t}\sum_{j=0}^{K(n)-1}\frac{1}{j!}t^j(A-\lambda_n)^j P_n,\quad t\geqslant 0.$$

注 2　直线 $\mathrm{Re}\lambda=\beta_0$ 的左侧无论是本质谱或连续谱都不影响展开，β_0 可以为 $-\infty$，也可以为一个有限实数.

注 3　直线 $\mathrm{Re}\lambda=\beta_0$ 的右侧的本征值可以是无穷多个也可以是有限多个，当为有限个时，展开式中的 m 不应超过这个数.

作为推论，看到这里的展开与[2]中对紧和拟紧半群所作的展开一样，这里的方法和[2]中不一样.

推论 2[2]　设 $T(t)$ 是 Banach 空间 E 上对 $t\geqslant t_0>0$ 的紧 C_0 半群，则 A 的谱是可数集，并且是有限代数重本征. 此外对任意实数 $r\in R$，集 $\{\lambda\in\sigma(A):\mathrm{Re}\lambda>r\}$ 为有限集，记 $\sigma(A)=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$，并且 $\mathrm{Re}\lambda_{n+1}>\mathrm{Re}\lambda_n$，而且当 $\sigma(A)$ 是无限时 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}\lambda_n=-\infty$，记 λ_n 的重数为 $K(n)$，对应的本征投影为 P_n，则对每一 $m\in N, x\in D(A)$ 有

$$T(t)x = \sum_{n=1}^{m}T_n(t)x + R_m(t)x,$$

其中 $T_n(t)=\exp(\lambda_n t)\sum_{j=0}^{K(n)-1}\frac{1}{j!}t^j(A-\lambda_n)^jP_n,\quad t>0, \|R_m(t)\|\leqslant C\exp((\varepsilon+\mathrm{Re}\lambda_m)t), \varepsilon>0$，$C=C(\varepsilon,m)$ 为常数.

证明 由[3]知前半部分命题成立，只需证后半部分. 由[3]Th2.3.6知 $\lim\limits_{|\tau|\to\infty}\|R(\sigma+i\tau,A)\|=0$，对任意实数 σ 成立从而应用定理1及定理1后的注1知结论成立.

推论 3[2] 设 $T(t)$ 为Banach空间 E 上拟紧半群，生成元为 A，则 $\{\lambda\in\sigma(A),\mathrm{Re}\lambda\geqslant 0\}$ 为有限集，它包含有限代数重极点，按实部从大到小排序为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，对应本征投射为 $P_1,P_2,\cdots,P_m$，则

$$T(t)x=\sum_{n=1}^{m}T_n(t)x+R_n(t)x,$$

其中 $T_n(t)x=\exp(\lambda_n t)\sum\limits_{j=0}^{K(n)-1}\frac{1}{j!}t^j(A-\lambda_n)^jP_n,t>0$, $\|R_m(t)\|\leqslant C\exp((\varepsilon+\mathrm{Re}\lambda_m)t)$, $\varepsilon>0$, $C=C(\varepsilon,m)$ 为常数.

需要指出的是推论2中对紧半群 $\beta_0=\infty$，展开项可为无穷项，而对拟紧半群 $\beta_0=0$，只有有限项. 事实上可以验证对解析半群，可微半群，算子范数连续半群，正半群都有前面类似定理1的渐近展开.

特别地，若 $E=L^p(\Omega)$，其中 $1<p<\infty$，Ω 为某一测度空间，注意 $L^p(\Omega)$ 上 C_0 半群有如下特征：

引理 4[4] 设 A 为 $L^p(\Omega)$ 空间（其中 $1<p<\infty$）下 C_0 半群 $T(t)$ 的生成元，则 $e^{\lambda t}\in P(T(t))$ 的充分必要条件是 $\{\mu_k:k\in N\}\subset P(A)$ 且 $\|R(\mu_k,A)\|$ 关于 k 有界，其中 $N=\{0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$，$\mu_k=\lambda+\frac{2k\pi i}{t}$，$k\in N$.

定理 5 设 A 为 $L^p(\Omega)$ 上 C_0 半群 $T(t)$ 的生成元，在 C 平面上有一直线 $\mathrm{Re}\lambda=\beta_0$，在其右侧，除 A 的可数个有限重离数本征值外均为予解集，且这些本征值按实部从大到小排序为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n,\cdots,\lambda_n$ 对应的本征投影为 P_n，此外对于 $\lambda\in\{\lambda\in C:\lambda=\alpha+i\beta,\alpha\geqslant\beta_0\}\backslash\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\}$ 有 $\|R(\alpha+i\beta,A)\|$ 关于 $\beta\in R$ 一致有界，则

$$T(t)=\sum_{n=1}^{m}T(t)P_n+R_m(t),$$

其中 $\|R_m(t)\|\leqslant C\exp((\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon)t)$, $\varepsilon>0$, $\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon>\mathrm{Re}\lambda_{m+1}$, $C>0$ 为常数.

证明 对任意固定的正整数 $m\in N$，记 $\sigma_1=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$. 则 $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, $\sigma_2=\sigma(A)\backslash\sigma_1$，显然 σ_1 紧，σ_1,σ_2 为非空不连通闭集，由[2]对应 σ_1,σ_2 有唯一谱分解，对应 σ_1 的谱投影应为 $P=\sum\limits_{n=1}^{m}P_n$. $T(t)$ 在 E_2 上诱导半群，其生成元记为 $A|E_2$，由于 $\lambda_1,\lambda_2\cdots$ 离散，可取到充分小的 $\varepsilon>0$，使 $\{\lambda\in C,\mathrm{Re}\lambda+\varepsilon\geqslant\mathrm{Re}\lambda_m\}\subset\rho(A|E_2)$，对任意 $x\in E_2$ 有：

$$\|R(\mathrm{Re}\lambda+\varepsilon+i\beta,A|E_2)x\|=\|(I-P)R(\mathrm{Re}\lambda+\varepsilon+i\beta,A)x\|,$$

从而 $\|R(\mathrm{Re}\lambda+\varepsilon+i\beta,A|E_2)\|$ 对 $\beta\in R$ 一致有界. 由引理4知 $e^{(\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon)t}\in\rho(T(t)|E_2)$. 由于 $w(A|E_2)$ 为 $T(t)|E_2$ 的谱半径，则 $w(A|E_2)\leqslant\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon$，从而

$$\|T(t)(I-P)\|\leqslant\|I-P\|\,\|T(t)|E_2\|\geqslant C\exp((\mathrm{Re}\lambda_m-\varepsilon)t).$$

此即所要证表示式.

下面举一个简单的例子.

考虑 $L^p[0,r_m]$ 上 $(1<p<\infty)$ 的人口发展方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial f(a,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial f(a,t)}{\partial a}=-\mu(a)f(a,t), & 0<a<r_m, t>0, \\
f(a,0)=f_0, & 0\leqslant a\leqslant r_m, \\
f(0,t)=\displaystyle\int_0^{r_m}\beta(a)f(a,t)da, & t>0,
\end{cases}
$$

其中 r_m 为人口最大存活年龄，$f(a,t)$ 为人口密度，$\mu(a)$ 为按龄死亡率，$\beta(a)$ 为死亡率，f_0 为初始人口密度，定义人口算子如下：

$$
A\varphi=-\frac{d\varphi}{da}-\mu(a)\varphi(a), \quad \varphi(a)\in D(A),
$$

$$
D(A)=\{\varphi:\varphi\in L^p[0,r_m], A\varphi\in L^p[0,r_m], \varphi(0)=\int_0^{r_m}\beta(a)\varphi(a)da\}.
$$

于是人口发展方程可以写为

$$
\begin{cases}
\dfrac{df}{dt}=Af, \\
f(0)=f_0.
\end{cases}
$$

记

$$
\psi(\lambda)=\int_0^{r_m}\beta(a)e^{-\lambda a-\int_0^a\mu(\xi)d\xi}da,
$$

$$
\beta_\lambda f=\int_0^a f(a)e^{-\int_s^a(\lambda+\mu(\rho))d\rho}ds,
$$

则有[5],[6]，

1. 若 $\psi(\lambda)\neq 1$，则 $\lambda\in\rho(A)$ 且对应予解式为

$$
R(\lambda,A)f=\frac{1}{1-\psi(\lambda)}\int_0^{r_m}\beta(a)\beta\lambda f(a)da e^{-\int_0^a(\lambda+\mu(s))ds}+\beta_\lambda f(a).
$$

2. A 只有离散的谱点且按实部大小可以排列为 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots$，这里 λ_0 为唯一实本征值且代数重数为 1，$\lambda_1,\lambda_2\cdots$ 为复本征值且位于 λ_0 以左，共轭成对出现，没有有限聚点.

3. 人口算子 A 在 $L^p[0,r_m]$ 上生成 C_0 半群 $T(t)$.

此外还容易验证

4. $R(\lambda,A)$ 在 $\{\lambda=a+i\beta,\beta\in R, a$ 为一常数$\}$ 上除去可能的 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 外一致有界.

于是，应用定理 5 得如下结果.

定理 6　对 $f_0\in D(A)$，人口发展方面方程的解有如下渐近展开

$$
f(a,t)=T(t)f_0=T(t)P_1f_0+T(t)P_2f_0+\cdots+T(t)P_nf_0+R_n(t)f_0,
$$

其中 $\|R_n(t)\|\leqslant C\exp((\mathrm{Re}\lambda_n-\varepsilon)t), \varepsilon>0$.

这个结果和人口理论中所得到的展开一样.

参 考 文 献

[1] F. Neubrander, *On the relation between the semigroup and its infinitesimal generator*, Proceeding Amer. Math. Soc., 100(1)(1987), 104—108.

[2] R. Nagel, *One-parameter semigroups of positive operators*, LNM1184, Springer-Verlag, 1986.

[3] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, 1983.
[4] 张宏伟、朱广田、梁本中，$L^p(\Omega)$ 空间正 C_0 半群的稳定性，中国科学，9(1992)，942—948.
[5] 宋健、于景元，人口控制论，科学出版社，1985.
[6] 郭宝珠、朱广田，人口算子生成 C_0 半群的性质，系统科学与数学，6(11986)，239—240.
[7] G. Dotsch，Laplace 变换的理论和应用导论，张义良译，科学出版社，1966.

On the Asymptotic Expansion of C_0 -Semigroup

Zhang Hongwei　　*Hu Qingying*
(Dept. of Basic Sci., Zhengzhou Grain College, Zheng Zhou 450052)
Zhu Guangtian
(Inst. of Sys. Sci., Academic Sinica, Beijing 100080)

Abstract

In this paper, we get the asymptotic expansions of C_0 -semigroup from some practical instance under conditions only on resolvet.

Keywords　C_0 -semigroup, asymptotic expansion, resolvet.