第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

无单位元的群分次环、Smash积及其一个应用*

孙 建 华
(杨州大学师范学院数学系，225002)

摘 要 本文对于具有局部单位元的群分次环 R 证明了左 $R\#G^*$-模范畴与分次左 R-模范畴是同构的，并给出 R 是分次右完全环的一些充要条件.

关键词 群分次环，Smash积，分次右完全环.
分类号 AMS(1991) 16W50/CCL O153.3

设 G 为任意群，e 为 G 的单位元. 环 R 称为 G-分次的，如果 $R=\bigoplus\limits_{g\in G}R_g$，且对任意的 $g,h\in G$，有 $R_gR_h\subseteq R_{gh}$. 若对于 $\forall\, g,h\in G$，有 $R_gR_h=R_{gh}$，则称 R 为强 G-分次的. R_g 中的元素称为阶为 g 的齐次元素. 若 $r\in R$，用 r_g 表示 r 的 g-分量. R 的全体齐次元素之集记为 $h(R)$. 左 R-模 M 称为单式的(unital)，如果 $RM=M$. 文中模总是指左单式模，分次环的概念见[1].

定义 1[2] 设 R 是 G-分次环，smash 积 $R\#G^*$ 是左 R-模 $\bigoplus\limits_{g\in G}Rp_g$，$g\in G$，其中乘法为 $(ap_g)(bp_h)=ab_{gh^{-1}}p_h$. 易验证 $R\#G^*$ 是一个结合环.

环 R 称为具有局部单位元[3]，如果 R 的每个有限子集都包含于形如 cRc 的子环，其中 $c^2=c\in R$.

定义 2 设 T 为环 R 的一个有限子集，$d\in R$ 称为 T 的一个 F-单位元，如果对 $\forall\, x\in T$，都有 $dx=xd=dxd=x$. 环 R 称为具有 F-单位元，如果 R 的每个有限子集都有 F-单位元.

引理 3 设 R 是具有局部单位元的 G-分次环，则有

1) $h(R)$ 中每个有限子集都有阶为 e 的 F-单位元. 特别地，R_e 是具有 F-单位元的环.

2) $R\#G^*$ 是具有 F-单位元的环.

证明 1) 设 $T=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 $h(R)$ 的任一有限子集. 由于 $T\subseteq R$，存在 $c^2=c\in R$ 使 $T\subseteq cRc$. 即对于 $\forall\, x_i\in T$，有 $cx_i=x_ic=cx_ic=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 令 c 的齐次分解为 $c=\sum\limits_{\sigma\in G}c_\sigma$，因为 $(\sum\limits_{\sigma\in G}c_\sigma)x_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 设 $\deg x_i=g_i$，所以必有一个 σ_0 使 $\sigma_0g_i=g_i$，故 $\sigma_0=e$. 因此有 $c_ex_i=x_i$，$(\sum\limits_{\sigma\neq e}c_\sigma)x_i=0$. 而且 $x_ic_e=c_ex_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 故 $c_e\neq 0$ 为 T 的 F-单位元.

2) 令 $H=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是 $R\#G^*$ 的任一有限子集，不妨设 $y_i=r_ip_{g_i}$，$\deg r_i=h_i\in G$. 定义 G 的子集 $L=\{g\in G\mid g=g_i$，对某个 i；或 $g=h_ig_i$，对某个 $i\}$. 令 $T=\{r_i\in h(R)\mid r_ip_{g_i}\in H\}$，则 T 是 R 的有限子集. 由题设存在 $c^2=c\in R$ 使 $T\subseteq cRc$，并且对 $\forall\, r_i\in T$，有 $cr_ic=$

---

* 1993年3月15日收到.

r_i. 由 1) c_e 为 T 的 F-单位元. 取 $w=\sum_{g\in L}c_ep_g\in R\# G^*$, 则 $wx_iw=wx_i=x_iw=x_i$, $i=1,2,\cdots,n$. 即 w 为 H 的 F-单位元.

下面的引理类似地可证.

引理 4 设 R 是具有局部单位元的 G-分次环. 则 $R\# G^*$-模 M 是单式模当且仅当对于 M 的每个有限子集 N, 存在 $w=\sum_{g\in L}c_ep_g$, L 是 G 的有限子集, $c_e\in R_e$, 使得 $wx=x$, 对 $\forall x\in N$.

引理 5 设 A 是具有 F-单位元的环. 若 A-模 M 是单式的, 则 M 的任一子模也是单式的.

引理 6 设 A 是具有 F-单位元的环. 若 A-模 M 是单式的, 且 $m\in M$, 则 $m\in Am$.

用 $R\# G^*$-Mod 表示单式的 $R\# G^*$-模和 $R\# G^*$-模同态组成的模范畴. 用 $R-gr$ 表示单式的 G-分次 R-模和保持分次的 R-模同态组成的模范畴.

定理 7 设 R 是具有局部单位元的 G-分次环, 则 $R\# G^*$-Mod 和 $R-gr$ 同构.

证明 首先, 若 $M\in R\# G^*$-Mod, 则 M 可用如下方法看作一个 G-分次的 R-模 M'. 对 $\forall g\in G$, 令 $M'_g=\sum_{h\in G}(R_{gh^{-1}}p_h)M$. 由于 $(R\# G^*)M=M$, 则有 $M'=\sum_{g\in G}M'_g$. 下证此和为直和. 若 $x\in M'_g\cap M'_h$, $g\neq h$, $g,h\in G$. 因为如 $s\neq t$, 有 $Rp_sM'_t=\{0\}$, 所以 $(R\# G^*)x=\{0\}$. 又 $R\# G^*$-模 M 是单式的, 由引理 4 存在 $w\in R\# G^*$ 使得 $x=wx$. 因此 $x\in(R\# G^*)x$. 故 $x=0$. 所以 $M'=\bigoplus_{g\in G}M'_g$. 在 M' 上定义分次 R-模结构

$$rx=(rp_g)x, \text{对} \ \forall r\in R, x\in M'_g. \tag{1}$$

易验证 $(rs)x=r(sx)$, 并且对 $\forall r\in R_g$, $x\in M'_h$ 有 $rx=(rp_h)x=(r_{ghk^{-1}}p_k)x\subseteq(\sum_{k\in G}R_{ghk^{-1}}p_k)=M'_{gh}$. 即 $R_gM'_h\subseteq M'_{gh}$. 而且由于 $(R\# G^*)M=M$, 有 $RM'=M'$, 故 $M'\in R-gr$.

任取 $M,P\in R\# G^*$-Mod, 及 $R\# G^*$-模同态 $\psi: M\to P$. 由于对 $\forall m\in M$, $\psi(m)\in P$, 利用引理 4 有 $w=\sum_{g\in L}c_ep_g\in R\# G^*$ 使得 $m=(\sum_{g\in L}c_ep_g)m$ 和 $\psi(m)=(\sum_{g\in L}c_ep_g)\psi(m)$ 成立, 其中 L 是 G 的某个有限子集, $c_e\in R_e$ 是 F-单位元. 故有 $\psi'(rm)=\psi((\sum_{g\in L}rc_ep_g)m)=\sum_{g\in L}rc_ep_g\psi(m)=r\sum_{g\in L}c_ep_g\psi(m)=r\psi'(m)$. 即 ψ' 是分次 R-模同态. 又 $\psi'(m_g)=\psi(c_ep_gm)=c_ep_g\psi(m)=c_e\psi'(m)_g=\psi'(m)_g$, 这里的 $w=c_ep_g$ 是由 m_g 和 $\psi(m_g)$ 所确定, 即 ψ' 是保持分次的.

其次, 任一 G-分次 R-模 M 有一个 $R\# G^*$-模结构

$$(rp_g)m=rm_g, \tag{2}$$

且 $(rp_g)((sp_h)m)=(rp_g)(sm_h)=r(sm_h)_g=rs_{gh^{-1}}m_h=(rs_{gh^{-1}}p_h)m=((rp_g)(sp_h))m$. 若 $M\in R-gr$, 记 M'' 为如上定义的 $R\# G^*$-模. 由于 $RM=M$, 所以 $(R\# G^*)M''=M''$. 设 $\varphi: M\to N$, $M,N\in R-gr$, 是保持分次的 R-模同态. 由于 $\varphi''((rp_g)m)=\varphi(rm_g)=r\varphi(m_g)=r(\varphi(m))_g=rp_g(\varphi''(m))$, 所以 $\varphi'': M''\to N''$ 是 $R\# G^*$-模同态.

综上可知, 对一个 $R\# G^*$-模 M, 由 (1) 定义了分次 R-模 M', 再由 (2) 定义 $(M')''$, 则 $(M')''=M$. 这是因为 $(rp_g)(m')''=r(m')_g=r(c_ep_gm)=(rc_ep_g)m=(rp_g)m$, 其中 $c_e\in R$ 是 m,r 有关的 F-单位元. 同理可证 $(M'')'=M$.

在定理 7 中若取 G 为有限群, R 为有单位元的环就得到[4, 定理 2.2].

定义 8 G-分次环 R 称为分次右完全的, 若 R 中由齐次元素生成的主左理想满足降链条

件.

定理 9　设 R 是具有 F-单位元的环，M 是单式的左 R-模. 则 M 满足循环子模降链条件当且仅当 M 满足有限生成子模降链条件.

证明类似于[5，定理 11.7.1].

定理 10　设 R 是具有局部单位元的 G-分次环，$M \in R-gr$. 则下列条件等价：

1)　M 满足有限生成分次子模降链条件.

2)　M 满足循环分次子模降链条件.

3)　M 满足由齐次元素有限生成的子模降链条件.

4)　M 满足由齐次元素生成的循环子模降链条件.

证明　1)$\Leftrightarrow$2)$\Leftrightarrow$3) 是平凡的，3)$\Leftrightarrow$4) 同非分次情形.

引理 11　设 R 是具有局部单位元的 G-分次环. 若 $M \in R-gr$，N 是 M 的分次 R-子模，则 N 是有限生成的分次 R-子模当且仅当 N 作为 $R\#G^*$-模 M 的子模也是有限生成的.

证明　$\Rightarrow$) 设 N 是有限生成的分次 R-子模. 由引理 5，N 是单式的. 据定理 7，N 作为 $R\#G^*$-模是 M 的子模，且也是单式的. 又 N 是分次的，可设生成元 $n_1,n_2,\cdots,n_s \in h(R)$，$\deg n_i = \sigma_i$，$i=1,2,\cdots,s$. 由题设存在 $c_e \in R_e$ 使得 $c_e n_i = n_i$，$i=1,2,\cdots,s$. 由此得 N 作为 $R\#G^*$-子模是由元素 $c_e p_{\sigma_i} n_i$，$i=1,2,\cdots,s$ 生成的.

$\Leftarrow$)　设 N 作为 $R\#G^*$-模是有限生成的子模，生成元为 $m_1,m_2,\cdots,m_t$. 由于 $R\#G^*$-模 M 是单式的，据引理 4 和 5，存在 $w=\sum\limits_{g\in L} c_e p_g$，其中 L 是 G 的有限子集，$c_e \in R_e$，使得 $m_i = w m_i = c_e p_{g_1} m_i + c_e p_{g_2} m_i + \cdots + c_e p_{g_k} m_i$，$i=1,2,\cdots,t$. 即 $R\#G^*$-模 N 是由 $c_e p_{g_j} m_i$，$i=1,2,\cdots,t$；$j=1,2,\cdots,k$ 生成的. 记 $(m_i)_{g_j} = c_e p_{g_j} m$，则由定理 7 知 $(m_i)_{g_j} \in M'_{g_j}$，$i=1,2,\cdots,t$；$j=1,2,\cdots.k$ 是分次 R-模 M 的有限多个齐次元素，且生成分次 R-子模 N.

定理 12　设 R 是具有局部单位元的 G-分次环，则下列条件等价：

1)　R 是分次右完全的.

2)　每个 $M \in R-gr$ 满足由齐次元素生成的循环子模降链条件.

3)　每个 $M \in R\#G^*$-Mod 满足循环子模降链条件.

4)　$R\#G^*$ 是右完全的.

证明　1)$\Leftrightarrow$2) 据引理 6 可设

$$Rm \supseteq Rr_1m \supseteq Rr_2r_1m \supseteq \cdots \supseteq Rr_sr_{s-1}\cdots r_1m \supseteq \cdots, \tag{3}$$

其中 $r_i \in h(R)$，$m \in h(M)$，是分次 R-模 M 的任一由齐次元素生成的循环子模降链. 由 1) 知降链 $R \supseteq Rr_1 \supseteq Rr_2r_1 \supseteq \cdots \supseteq Rr_sr_{s-1}\cdots r_1 \supseteq \cdots$ 有限终止. 从而降链(3) 有限终止，即 1)$\Rightarrow$2) 成立. 反之显然.

类似可证 3)$\Leftrightarrow$4). 由定理 9，10 和引理 11 可证 2)$\Leftrightarrow$3).

下面讨论强 G-分次环的性质.

引理 13　设 R 是有局部单位元的 G-分次环. 若 $M \in R-gr$ 满足循环分次子模降链条件，则 R_e-模 M_g 满足循环子模降链条件，对 $\forall g \in G$.

证明　首先，若 $N \subset M_g$ 是一个 R_e-子模，则 $N = RN \cap M_g$. 由引理 3 知 R_e 具有 F-单位元，而且若 N 是 M_g 的有限生成的 R_e-子模，生成元为 $x_1,x_2,\cdots,x_s \in M_g$. 则 RN 是 M 的有限

生成分次 R- 子模，生成元仍为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$. 现令 M_g 的任一有限生成 R_e- 子模降链为

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \cdots, \tag{4}$$

则有 M 的有限生成分次 R- 子模降链为 $RN_1 \supseteq RN_2 \supseteq \cdots \supseteq RN_n \supseteq \cdots$. 由题设及定理 10，存在正整数 m 使得 $RN_m = RN_{m+1} = \cdots$. 利用等式 $N = RN \cap M_g$，有 $N_m = N_{m+1} = \cdots$. 即降链 (4) 有限终止.

定理 14　设 R 是具有局部单位元的强 G- 分次环，$M \in R-gr$，则 M 满足循环分次子模降链条件当且仅当 R_e- 模 M_e 满足循环子模降链条件.

证明　$\Rightarrow$) 由引理 13 得证.

$\Leftarrow$)　首先，若 $N \subset M$ 是循环分次 R- 子模. 则 N 也是由有限个齐次元素生成的. 由于 R 是强分次，则有 $RN_e = N$. 从而 $N_e = R_eN_e$ 也是有限生成的 R_e- 模. 现设 M 的任一由齐次元素有限生成的 R- 子模降链为

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_n \supseteq \cdots, \tag{5}$$

则有 M_e 的有限生成 R_e- 子模降链为 $(N_1)_e \supseteq (N_2)_e \supseteq \cdots \supseteq (N_n)_e \supseteq \cdots$. 由定理 9 知此降链有限终止. 即存在正整数 m 使 $(N_m)_e = (N_{m+1})_e = \cdots$. 故降链 $R(N_1)_e \supseteq R(N_2)_e \supseteq \cdots \supseteq R(N_n)_e \supseteq \cdots$ 有 $R(N_m)_e = R(N_{m+1})_e = \cdots$. 利用等式 $RN_e = N$ 得降链(5) 有限终止.

推论 15　设 R 是具有局部单位元的强 G- 分次环，则 R 是分次右完全的当且仅当 R_e 是右完全的.

参 考 文 献

[1] C. Năstăsescu and F. V. Oystaeyen, *Graded Ring Theory*, Math. Library, Vol. 28, North-Holland, Amsterdams, 1982.

[2] M. Beattie, *A generalization of the Smash product of a graded ring*, J. Pure and Appl. Alg., North-Holland, 52(1988), 219—226.

[3] P. N. Anh and L. Márki, *Morita equivalence for rings without identity*, Tsukuba J. Math., 11 (1987), 1—16.

[4] M. Cohen and S. Montgomery, *Group-graded rings, Smash product and group actions*, T. A. M. S., 282(1984), 237—258.

[5] F. Kasch, *Modules and Rings*, Academic Press INC, 1982.

Graded Rings Without Identity、Smash Product and An Application

Sun Jianhua

(Dept. of Math., Teacher's College, Yangzhou University, 225002)

Abstract

For any group G and G-graded ring R with local units, we prove that the categories of unital graded R-modules and unital $R\#G^*$-modules are isomorphic. Furthermore the categories isomorphism is applied to obtain some results of the graded perfect rings.

Keywords　group-graded ring, Smash praduct, graded right perfect ring.