第16卷第1期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 1
1996年2月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION Feb. 1996

张量积的代数K-理论及其应用*

郝志峰
(南京大学数学系，210008)

摘　要　本文研究了两个代数张量积的 Grothendieck 群 $K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$ 和 Whitehead 群 $K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$. 首先构作三个群同态 Ψ_1,Ψ_2,Ψ_3，并证明：若 R 为增广 Λ-代数，则存在 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)$ 的子群 C 使得 $K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\oplus C\simeq K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)$，并存在 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)$ 的子群 D 使得 $K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\oplus D\simeq K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)$. 然后给出在群代数和包络代数方面的应用，最后考虑 $K_0(R)\simeq Z$ 的增广代数的情形.

关键词　Grothendieck 群，Whitehead 群，张量积，增广代数.
分类号　AMS(1991) 19A/CCL O153.3

§1　引　言

在代数 K-理论中，环 R 的 Grothendieck 群 $K_0(R)$ 和 Whitehead 群 $K_1(R)$ 对研究环的结构起着重要作用，而研究两个代数的张量积是环论中的一个中心课题. 因此，研究两个代数的张量积的 Grothendieck 群和 Whitehead 群是颇有意义的[1].

本文中 Λ 为有单位元的交换环，Λ 上的代数为有单位元的结合代数，其同态均指单位元的同态. 代数 R 称为增广代数，是指有 Λ 代数同态 $\theta: R\rightarrow\Lambda$. 为了方便起见，本文将使用如下记号：

f. g$P_R\mathfrak{M}$：有限生成投射左 R-模范畴.

Ωf. g$P_R\mathfrak{M}$：有限生成投射左 R-模的回路范畴.

[ ]：K_0 群中等价的有限生成投射模类.

[,]：回路范畴中的等价类.

§2　三个群同态

由[2]知，若 $P\in$ f. g$P_R\mathfrak{M}$，$Q\in$ f. g$P_S\mathfrak{M}$. 则 $P\underset{\Lambda}{\otimes}Q\in$ f. g$P_{R\underset{\Lambda}{\otimes}S}\mathfrak{M}$. 故可令映射 $\psi: K_0(R)\times K_0(S)\rightarrow K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$ 使 $([P],[Q])\rightarrow[P\underset{\Lambda}{\otimes}Q]$. 由于 Λ 为一交换环，故 $K_0(\Lambda)$ 也成为交换环，且 $K_0(R)$，$K_0(S)$ 可看作右 -$K_0(\Lambda)$ 模，左 -$K_0(\Lambda)$ 模.

---

* 1993年3月30日收到. 作者现工作单位：华南理工大学.

引理 2.1　ψ 为一确定的双线性平衡映射.

证明　由张量积与直和可交换,知 ψ 为一确定的双线性映射.由张量积的结合性,知 ψ 为平衡映射.

命题 2.1　存在群同态 $\Psi_{\mathrm{I}}: K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes} K_0(S)\rightarrow K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$.

证明　从张量积的定义知,由引理 2.1 中的 ψ 诱导出 Ψ.

性质 2.1　命题 2.1 中的 Ψ_{I} 是自然的.即若有 Λ 上的代数同态 $R_1\xrightarrow{f}R_2$, $S_1\xrightarrow{g}S_2$,则有下面的群同态交换图.

$$\begin{tikzcd}
K_1(R_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S_1) \arrow[rrr, "\Psi_{\mathrm{I}}^1"] \arrow[dd, "K_0(f)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(g)"'] \arrow[dr, "1_{K_0(R_1)}\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(g)"] & & & K_0(R_1\underset{\Lambda}{\otimes}S_1) \arrow[dl, "K_0(1_{R_1}\underset{\Lambda}{\otimes}g)"'] \arrow[dd, "K_0(f\underset{\Lambda}{\otimes}g)"] \\
& K_0(R_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S_2) \arrow[r, "\Psi_{\mathrm{I}}^2"] \arrow[dl, "K_0(f)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}1_{K_0(S_2)}"] & K_0(R_1\underset{\Lambda}{\otimes}S_2) \arrow[dr, "K_0(f\underset{\Lambda}{\otimes}1_{S_2})"] & \\
K_0(R_2)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S_2) \arrow[rrr, "\Psi_{\mathrm{I}}^3"] & & & K_0(R_2\underset{\Lambda}{\otimes}S_2)
\end{tikzcd}$$

其中 Ψ_{I}^1, Ψ_{I}^2, Ψ_{I}^3 分别为各自诱导的群同态. 1_{R_1} 代表 R_1 上的恒等映射. $f\underset{\Lambda}{\otimes}g$ 为映射的张量积.

对于 Whitehead 群,由[3]中回路范畴所引入的定义,知 $K_1(\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M})=K_0(R\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M})$.又由[4]知有经典的同构 $\varphi: K_1(R)\rightarrow K_1(\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M})$. $\varphi([\alpha])=[R^n,\alpha]$ 其中 $\alpha\in GL_n(R)$.因此 $[P,\alpha]\in K_1(\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M})$ 可看作 $K_1(R)$ 中的元素,其中 $P\in\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M}$, $\alpha\in\mathrm{Aut}(P)$.

若定义映射 $\psi: K_0(R)\times K_1(S)\rightarrow K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$ 使 $\psi([P],[Q,\alpha])=[P\underset{\Lambda}{\otimes}Q, 1_P\otimes\alpha]$,其中 $P\in\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M}$. $Q\in\mathrm{f.g}P_S\mathfrak{M}$. $\alpha\in\mathrm{Aut}(Q)$ 易验证 ψ 是完全确定的,且 ψ 为双线性的,同时关于 $K_0(\Lambda)$ 是平衡映射,故 ψ 诱导出同态 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)\rightarrow K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$.同样亦存在同态 $K_1(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)\rightarrow K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$,故有

命题 2.2　存在群同态 $\Psi_{\mathrm{II}}: K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)\rightarrow K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$,使 $\Psi_{\mathrm{II}}([P_1]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[P_2,\alpha_2])=[P_1\underset{\Lambda}{\otimes}P_2, 1_{P_1}\underset{\Lambda}{\otimes}\alpha_2]$,和群同态 $\Psi_{\mathrm{II}}: K_1(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)\rightarrow K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$,使 $\Psi_{\mathrm{II}}([P_1,\alpha_1]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[P_2])=[P_1\underset{\Lambda}{\otimes}P_2, \alpha_1\underset{\Lambda}{\otimes}1_{P_2}]$.

注　若定义 $K_1(R)\times K_1(S)\rightarrow K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$ 的映射为 $([P_1,\alpha_1],[P_2,\alpha_2])\rightarrow[P_1\underset{\Lambda}{\otimes}P_2, \alpha_1\underset{\Lambda}{\otimes}\alpha_2]$,则可证明该映射是不确定的.

性质 2.2　对于 Ψ_{I}, Ψ_{II} 有群同态交换图:

$$
\begin{tikzcd}
K_1(R_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S_1) \arrow[r, "\Psi^1_{\mathrm{I}}"] \arrow[d, "K_1(f)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}1_{K_0(S_1)}"] & K_1(R_1\underset{\Lambda}{\otimes}S_1) \arrow[d, "K_1(f\underset{\Lambda}{\otimes}1_{S_1})"] & K_0(R_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S_1) \arrow[l, "\Psi^1_{\mathrm{II}}"'] \arrow[d, "K_0(f)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}1_{K_1(S_1)}"] \\
K_1(R_2)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S_1) \arrow[r, "\Psi^2_{\mathrm{I}}"] & K_1(R_2\underset{\Lambda}{\otimes}S_1) & K_0(R_2)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S_1) \arrow[l, "\Psi^2_{\mathrm{II}}"']
\end{tikzcd}
$$

其中 $f:R_1\to R_2$ 为 Λ 上的代数同态，Ψ'^1_{I}，Ψ'^2_{I}，Ψ'^1_{II}，Ψ'^2_{II} 为群同态.

§3 两种特殊情况

若 R，S 中之一为增广代数[5]（比如 Λ 上的多项式代数或群代数），则由[3]知，若有 Λ 上代数同态 $\theta:R\to\Lambda$，则 $\bar{\theta}:R\underset{\Lambda}{\otimes}S\to\Lambda\underset{\Lambda}{\otimes}S\simeq S$ 可由之诱导出，并且如果 $P\in \mathrm{f.g}P_{R\otimes_\Lambda S}\mathfrak{M}$，则 $S\underset{\theta}{\otimes}P\in \mathrm{f.g}P_S\mathfrak{M}$，$\alpha\in \mathrm{Aut}(P)$，$1_S\underset{\theta}{\otimes}\alpha\in\mathrm{Aut}(S\underset{\theta}{\otimes}P)$.

定理 3.1 若 R，S 中之一中有一个为 Λ 上的增广代数，则 Ψ'_{I} 为满同态，且 Ψ'_{I} 可裂. 即存在 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)$ 的子群 C，使得 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)\simeq K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\oplus C$.

证明 不妨假设 R 为增广代数，θ 为增广映射.

对 $\forall\, P\in\mathrm{f.g}P_{R\otimes_\Lambda S}\mathfrak{M}$，$S\underset{\theta}{\otimes}P\in\mathrm{f.g}P_S\mathfrak{M}$，$R\underset{\Lambda}{\otimes}\simeq R\in\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M}$，令 $\xi:K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\to K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)$ 为 $\xi([P])=[R\underset{\Lambda}{\otimes}\Lambda]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[S\underset{\theta}{\otimes}P]$，其中 $P\in\mathrm{f.g}P_{R\otimes_\Lambda S}\mathfrak{M}$. 易证 ξ 为群同态，且由于 $(R\underset{\Lambda}{\otimes}\Lambda)\underset{\Lambda}{\otimes}(S\underset{\theta}{\otimes}P)\cong P\underset{\Lambda}{\otimes}[(R\underset{\Lambda}{\otimes}\Lambda)\underset{\theta}{\otimes}S]\cong P\underset{\Lambda}{\otimes}(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\cong P$. 因此 $\Psi'_{\mathrm{I}}\circ\xi=1_{K_0(R\otimes_\Lambda S)}$，即 Ψ'_{I} 为群的满同态且可裂.

同样，对于同态 Ψ_{I}，Ψ'_{II}，有

定理 3.2 若 R，S 为 Λ 上的代数，且 R 为增广代数，则 Ψ'_{II} 为满同态，且 Ψ'_{II} 可裂，即存在 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)$ 的子群 D，使得 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)\simeq K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\oplus D$.

证明 构作 $\pi:K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\to K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(S)$ 为 $\pi([P,\alpha])=[R\underset{\Lambda}{\otimes}\Lambda]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[S\underset{\theta}{\otimes}P,1_S\underset{\theta}{\otimes}\alpha]$，其中 $P\in\mathrm{f.g}P_{R\otimes_\Lambda S}\mathfrak{M}$，$\alpha\in\mathrm{Aut}(P)$. 易证 $\Psi'_{\mathrm{II}}\pi=1_{K_1(R\otimes_\Lambda S)}$，故得证.

定理 3.2′ 若 R，S 为 Λ 上的代数，且 S 为增广代数，则 Ψ'_{II} 为满同态，且 Ψ'_{II} 可裂，即存在 $K_1(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)$ 的子群 E，使得 $K_1(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)\simeq K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\oplus E$.

证明与定理 3.2 类似.

如果更进一步，R，S 中的一个不仅为增广代数，而且它上面的每一个有限生成投射模是 Λ 扩张的（如 $R=\Lambda[t_1,\cdots,t_n]$），$\Lambda$ 为 VN 正则环[6],[7]），则由[5]知，对每一个 $P\in\mathrm{f.g}P_R\mathfrak{M}$，存在 $P_0\in\mathrm{f.g}P_\Lambda\mathfrak{M}$，且 $P\cong P_0\underset{\Lambda}{\otimes}R$，由此可得如下定理：

定理 3.3 若 R，S 中之一不仅为 Λ 上的增广代数，而且其上的每个有限生成投射模是 Λ 扩张的，则有群同构 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)\simeq K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)$.

证明 不妨设 R 具有题中假设的性质. 则对 $\forall\ [P]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[Q]\in K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)$，$[P]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[Q]=[R\underset{\Lambda}{\otimes}P_0]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[Q]=[R\underset{\Lambda}{\otimes}\Lambda]\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}[P_0\underset{\Lambda}{\otimes}Q]=\xi([P_0\underset{\Lambda}{\otimes}Q])$，故 ξ 为满同态，由定理 3.1 知 ξ 为单同态，得 ξ 为同构. 而 $\Psi_{\mathrm{I}}\xi=1_{K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)}$，故 Ψ_{I} 为同构.

注 由[5]知，在定理 3.3 的条件下，f.g$P_R\mathfrak{M}$ 与 f.g$P_\Lambda\mathfrak{M}$ 中的元素一一对应（若 R 满足条件），因而 $K_0(R)\simeq K_0(\Lambda)$，即定理 3.3 中的群同构即为 $K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\simeq K_0(S)$.

对于 Ψ_{I}，Ψ_{II}，我们也有

定理 3.4 若 R，S 为 Λ 上的代数，且 R 为增广代数，其上的每个有限生成投射模是 Λ 扩张的，则有群同构 $K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\simeq K_1(S)$.

证明 类似于定理 3.3 及其注，由定理 3.2 即得.

Ψ_{II} 的情况完全类似于定理 3.4.

§4 一些应用

由 §3 中的定理，易得

推论 4.1 若 $\{R_i\}_{i=1}^{n}$ 为 Λ 上的增广代数列，则存在 $\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=1}^{n}K_0(R_i)$ 的子群 C，$K_1(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}(\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=2}^{n}K_0(R_i))$ 的子群 D，使得

$$K_0(\underset{\Lambda}{\otimes}{}_{i=1}^{n}R_i)\oplus C\simeq\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=1}^{n}K_0(R_i),\ K_1(\underset{\Lambda}{\otimes}{}_{i=1}^{n}R_i)\oplus D\simeq K_1(R_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}(\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=2}^{n}K_0(R_i)).$$

对于群代数，它显然是增广代数. 由[8]知 $\Lambda(\bigoplus_{i=1}^{n}G_i)\simeq\underset{\Lambda}{\otimes}{}_{i=1}^{n}\Lambda G_i$，其中 Λ 为交换环，$\{G_i\}_{i=1}^{n}$ 为一列群，今有

推论 4.2 若 $\{G_i\}_{i=1}^{n}$ 为一列群，则存在 $\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=1}^{n}K_0(\Lambda G_i)$ 的子群 C，$K_1(\Lambda G_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}(\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=2}^{n}K_0(\Lambda G_i))$ 的子群 D，使得 $K_0(\Lambda(\bigotimes_{i=1}^{n}G_i))\oplus C\simeq\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=1}^{n}K_0(\Lambda G_i)$，$K_1(\Lambda(\bigoplus_{i=1}^{n}G_i))\oplus D\simeq K_1(\Lambda G_1)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}{}_{i=2}^{n}K_0(\Lambda G_i))$.

对于包络代数，由于 $K_0(R^{op})\simeq K_0(R)$，$K_1(R^{op}\simeq K_1(R)$，因而亦有

推论 4.3 若 R 为 Λ 上的增广代数，则存在 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(R)$ 的子群 C，$K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(R)$ 的子群 D，使得 $K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}R^{op})\oplus C\simeq K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(R)$，$K_1(R\underset{\Lambda}{\otimes}R^{op})\oplus D\simeq K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_1(R)$.

若 $K_0(\Lambda)=Z$（比如 Λ 为域，交换局部环或主理想整环），且 $K_0(R)\simeq Z^n$，$K_0(S)\simeq Z^m$，则在定理 3.1 的同构中 $K_0(R)\underset{K_0(\Lambda)}{\otimes}K_0(S)\simeq Z^{mn}\simeq K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\oplus C$，由此，知 $K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\simeq Z^k$，故有以下重要的结果.

定理 4.1 若 R，S 中之一为 Λ 上的增广代数，且有 $K_0(\Lambda)=Z$，$K_0(R)\simeq Z^n$，$K_0(S)\simeq Z^m$，则有 k 使 $K_0(R\underset{\Lambda}{\otimes}S)\simeq Z^k$.

由此定理，可得

推论 4.4 若 R，S 中之一为 Λ 上的增广代数，交换环 Λ 是极大理想为幂零理想的局部

环，且 $R, S \in \mathrm{PSF} \cap \mathrm{IBN}$，则 $R \otimes_{\Lambda} S \in \mathrm{PSF} \cap \mathrm{IBN}$.（注：PSF 表示有限生成投射模一定为稳定自由的环类，IBN 表示对自由模有基数不变性质的环类.）

证明 由[9]知，$K_0(R) \simeq Z \Leftrightarrow R \in \mathrm{PSF} \cap \mathrm{IBN}$. 由[10]知，$R \in \mathrm{IBN} \Leftrightarrow [R]$的阶数为无穷. 当 Λ 满足条件时，由[11]知 $R \otimes_{\Lambda} S \in \mathrm{IBN} \Leftrightarrow R \in \mathrm{IBN}, S \in \mathrm{IBN}$.

由于 $K_0(R \otimes_{\Lambda} S) \oplus C \simeq Z$，且$[R \otimes_{\Lambda} S]$的阶数为无穷，故 $K_0(R \otimes_{\Lambda} S) \simeq Z$，即

$$R \otimes_{\Lambda} R \in \mathrm{PSF} \cap \mathrm{IBN}.$$

作者对导师周伯埙教授和佟文廷教授的悉心指导表示感谢.

参 考 文 献

[1] H. Bass, *K-theory and stable algebra*, Pull. I. H. E. S., 22(1964), 5—60.

[2] 周伯埙，同调代数，科学出版社，1988.

[3] J. R. Silvester, *Introduction to Algebraic K-theory*, Chapman and Hall, 1981.

[4] H. Bass, *Introduction to some methods of algebraic K-theory*, Regional Conf. Series in Math., No. 20, 1973.

[5] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Academic press, 1979.

[6] 王文举，Von Neumann 正则环的 K-正则性，吉林大学自然科学学报，4(1991)，56—58.

[7] 王文举，Von Neumann 正则环 R 与其多项式环 R[t]上 K_0,K_1 的关系，数学杂志，Vol. 13, No. 1 (1993), 102—104.

[8] G. Karpilovsky, *Commutative Group Algebra*, Marcel Dekker, Inc., 1983.

[9] 佟文廷，Grothendieck 群及其应用，南京大学数学半年刊，Vol. 3, No. 1(1986), 1—11.

[10] Xu Yangsong, *A remark on the torsion subgroup of K_0*, J. of Nanjing University Mathematical Biquarterly, Vol. 2, No. 2(1985), 216—217.

[11] 王芳贵，IBN 代数的张量积，数学年刊，12A，增刊(1991)，66—71.

Algebraic k -Theory of Tensor Products with Applications

Hao Zhifeng

(Dept. of Appl. Math., South China Univ. of Tech., Guangzhou 510641)

Abstract

In this paper we consider the Grothendieck group $K_0(R \otimes_{\Lambda} S)$ and the Whitehead group $K_1(R \otimes_{\Lambda} S)$. We prove that if R is an argmented Λ —algebra then there exists a subgroup C of $K_0(R) \otimes_{K_0(\Lambda)} K_0(S)$ such that $K_0(R \otimes_{\Lambda} S) \oplus C \simeq K_0(R) \otimes_{K_0(\Lambda)} K_0(S)$, and a subgroup D of $K_0(R) \otimes_{K_0(\Lambda)} K_1(S)$ such that $K_1(R \otimes_{\Lambda} S) \oplus D \simeq K_0(R) \otimes_{K_0(\Lambda)} K_1(S)$.

Some application for group algebras and enveloping algebras are given.

Keywords Grothendieck group, Whiteheand group, tensor product, envloping algebra.