第16卷第1期
1996年2月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION

Vol. 16 No. 1
Feb. 1996

带有随机失落及随机增流的定时截尾试验*

张连诚　　祁燕申　　傅登枝
(沈阳工业学院，沈阳 110015)

摘　要　本文对寿命具有指数模型的产品，在定时截尾试验同时兼有随机失落及随机增添的情形，对产品可靠性参数给出了估计方法.

关键词　随机失落，随机增添，定时截尾.
分类号　AMS(1991) 62N05/CCL O213.2

1 引　言

对产品(元件、部件或系统)的可靠性参数进行估计时，通常对产品抽样进行定时截尾试验，在某些情况下试件具有随机失落(丢失、删失)现象，中途脱离观察，其寿命数据发生随机截尾；另一方面，试验开始后，产品对试验系统具有随机增添(加入、流入)现象，中途有产品加入观察，其寿命数据不是从开始记录的，称此为随机截首数据. 假定产品的失效、失落和增添时间都遵循指数分布，即产品寿命的概率密度为

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t \geqslant 0, \lambda > 0 \text{ 为失效率}); \tag{1}$$

产品的失落时间其概率密度为

$$g(t) = \mu e^{-\mu t} \quad (t \geqslant 0, \mu > 0 \text{ 为失落率}); \tag{2}$$

试验开始后产品对试验系统的增添其时间概率密度为

$$h(t) = v e^{-v t} \quad (t > 0, v > 0 \text{ 为增添率}), \tag{3}$$

且产品的失效、失落和增添是相互独立，产品失落前及增添前均是正常的，λ, μ, v 无关且

$$\lambda + \mu \neq v. \tag{4}$$

在上述假定下，给出了产品可靠性参数的估计方法.

2 基本结果

如果以 0,1,2,3 分别表示产品的正常、失效、失落和增添状态，$E = \{0,1,2,3\}$ 为状态集，$W = \{0,3\}$ 为工作状态集，$F = \{1,2\}$ 为非正常状态集，设 $\{X(t); t \geqslant 0\}$ 是取值 E 上的一个随机过程，并令

$$P_i(t) = P\{X(t) = i\} \quad (i \in E) \tag{5}$$

* 1993年7月5日收到. 94年12月5日收到修改稿.

为时刻 t 过程处于状态 i 的概率，则有

定理1 满足假定条件(1)－(4)的随机过程$\{X(t);t\geqslant 0\}(i\in E)$是 E 上的齐次马尔可夫过程，且

$$\begin{cases} P_0(t)=ae^{-(\lambda+\mu)t}+\dfrac{bv}{v-\lambda-\mu}(e^{-(\lambda+\mu)t}-e^{-vt}), & (6)\\ P_1(t)=\dfrac{a\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})+\dfrac{bv}{v-\lambda-\mu}[\dfrac{v}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})-(1-e^{-vt})], & (7)\\ P_2(t)=\dfrac{a\mu}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})+\dfrac{b\mu}{v-\lambda-\mu}[\dfrac{v}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t})-(1-e^{-vt})], & (8)\\ P_3(t)=be^{-vt}, & (9)\end{cases}$$

其中 $a\geqslant 0,b\geqslant 0,a+b=1$，状态 $i(i\in E)$的初始分布

$$(P_0(0),P_1(0),P_2(0),P_3(0))=(a,0,0,b). \tag{10}$$

该定理的证明可参见[1].

推论 满足假定条件(1)－(4)的产品可靠度为

$$R(t)=P_0(t)+P_3(t)=ae^{-(\lambda+\mu)t}\frac{b}{v-\lambda-\mu}[ve^{-(\lambda+\mu)t}-(\lambda+\mu)e^{-vt}]. \tag{11}$$

设 $t=0$ 时随机抽取 N_1 件产品进行寿命试验，到 $t=t_0$ 时停止试验，此时如有 n_1 件产品仍工作正常，r_1 件产品失效，记录其失效时刻为

$$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_{r_1}. \tag{12}$$

有 ω_1 件产品失落脱离观察，记录其时刻为

$$\tau_1\leqslant\tau_2\leqslant\cdots\leqslant\tau_{\omega_1}, \tag{13}$$

$$N_1=r_1+\omega_1+n_1,$$

在时间间隔$[0,t]$内，对试验系统发生 N_2 次随机增添，记录其增添的时刻为

$$T_1\leqslant T_2\leqslant\cdots\leqslant T_{N_2}. \tag{14}$$

产品增添加入试验后在 $t=t_0$ 前有 r_2 件发生失效，记录其时刻并确定该产品的增添时刻分别为

$$x'_1\leqslant x'_2\leqslant\cdots\leqslant x'_{r_2}, \tag{15}$$

$$T_1^{(1)},T_2^{(1)},\cdots,T_{r_2}^{(1)}.$$

令 $y_j=x'_j-T_j^{(1)}(j=1,2,\cdots,r_2)$，有 n_2 件正常工作到 t_0，确定其增添时刻为

$$T_1^{(0)},T_2^{(0)},\cdots,T_{n_2}^{(0)}.$$

令 $z_i=t_0-T_i^{(0)}(i=1,2,\cdots,n_2)$，有 ω_2 件发生失落，记录其时刻并确定产品增添时刻分别为

$$\tau'_1\leqslant\tau'_2\leqslant\cdots\leqslant\tau'_{\omega_2}, \tag{16}$$

$$T_1^{(2)},T_2^{(2)},\cdots,T_{\omega_2}^{(2)},N_2=r_2+\omega_2+n_2.$$

令 $\omega_l=\tau'_l-T_l^{(2)}(l=1,2,\cdots,\omega_2)$.

定理2 满足假定条件(1)－(4)的产品，在定时($t=t_0$)截尾试验，样本观察值为(12)－(16)时，似然正数为

$$L(x_1,\cdots,x_{r_1};\tau_1,\cdots,\tau_{\omega_1};T_1,\cdots,T_{N_2};x'_1,\cdots,x'_{r_2};\tau'_1,\cdots,\tau'_{\omega_2})$$

$$= c\lambda^{r_1+r_2}\mu^{\omega_1+\omega_2}v^{N_2}e^{-(\lambda+\mu)T}e^{-vT_0}, \tag{17}$$

其中

$$C = \frac{N_1!N_2!}{n_1!n_2!},$$

$$T_0 = \sum_{i=1}^{N_2} T_i, \tag{18}$$

$$T = \sum_{k=1}^{r_1} x_k + \sum_{s=1}^{\omega_1} \tau_s + \sum_{j=1}^{r_2} y_j + \sum_{l=1}^{\omega_2} \omega_l + \sum_{i=1}^{n_2} z_i + n_1 t_0. \tag{19}$$

该定理的证明亦根据[1].

推论 1 满足假定条件(1)－(4)的产品失效率 λ、失落率 μ、增添率 v 及可靠度 $R(t)$的极大似然估计为

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{r_1 + r_2}{T},\ \hat{\mu} = \frac{1}{\hat{\varphi}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{T},\ \hat{v} = \frac{1}{\hat{\psi}} = \frac{N_2}{T_0}, \tag{20}$$

$$\hat{R}(t) = ae^{-(\hat{\lambda}+\hat{\mu})t} + \frac{b}{\hat{v} - \hat{\lambda} - \hat{\mu}}[\hat{v}e^{-(\hat{\lambda}+\hat{\mu})t} - (\hat{\lambda} + \hat{\mu})e^{-\hat{v}t}], \tag{21}$$

其中 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, a+b=1$ 为产品正常、增添的初始分布，$\hat{\theta},\hat{\varphi},\hat{\psi}$ 分别为产品失效、失落、增添发生的平均时间.

推论 2 $E(\hat{\psi})=\psi,\ D(\hat{\psi})=\dfrac{\psi^2}{N_2}$.

推论 3 对于 $\psi=\dfrac{1}{v}$在给定水平 α 下，其置信度 $1-\alpha$ 及置信度至少为 $1-\alpha$ 的置信区间分别为

$$\left(\frac{1}{c},\frac{1}{d}\right), \tag{22}$$

$$(2t_0/\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(2N_2 + 2), 2t_0/\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(2N_2)), \tag{23}$$

其中 c,d 分别为下列方程的解 v

$$\sum_{i=0}^{N_2-1} \frac{(vt_0)^i}{i!}e^{-vt_0} + \frac{(vt_0)^{N_2}}{N_2!}e^{-vt_0}u_1 = 1 - \frac{\alpha}{2},$$

$$\sum_{i=0}^{N_2-1} \frac{(vt_0)^i}{i!}e^{-vt_0} + \frac{(vt_0)^{N_2}}{N_2!}e^{-vt_0}u_2 = \frac{\alpha}{2},$$

u_1,u_2 为(0,1)上独立的均匀随机数.

推论 4 在$[0,t_0]$内产品增添的数目$\{N(t);t\geqslant 0\}$是一泊松过程，增添个数为 N_2 的概率

$$P\{N(t) = N_2\} = \frac{(vt_0)^{N_2}}{N_2!}e^{-vt_0}. \tag{24}$$

3 两种特殊情况

（一） 仅带有随机失落的定时截尾试验情形：此时增添率 $v=0$，故增添产品数 $N_2=0$，(10)式中 $a=1,b=0$. 由(11)式得到产品的可靠度 $R(t)=e^{-(\lambda+\mu)t}$. 由(19)，(20)式得总的试验

时间

$$T=\sum_{k=1}^{r_1}x_k+\sum_{s=1}^{\omega_1}\tau_s+n_1t_0,\hat{\lambda}=\frac{1}{\hat{\theta}}=\frac{r_1}{T},\ \hat{\mu}=\frac{1}{\hat{\varphi}}=\frac{\omega_1}{T},\hat{R}(t)=e^{-(\hat{\lambda}+\hat{\mu})t}=e^{-(1+\frac{\omega_1}{r_1})\hat{\lambda}t},$$

$\theta=\frac{1}{\lambda}$的置信度为 $1-\alpha$ 及置信度至少为 $1-\alpha$ 的置信区间分别为

$$(-(r_1+\omega_1)t_0/[r_1\ln(1-a)],\ -(r_1+\omega_1)t_0/[r_1\ln(1-b)]),$$
$$(-(r_1+\omega_1)t_0/[r_1\ln(1-a^*)],\ -(r_1+\omega_1)t_0/[r_1\ln(1-b^*)]),$$

其中 a,b 分别为下列方程的解 x

$$\sum_{i=1}^{N_1-n_1-1}\binom{N_1}{i}x^i(1-x)^{N_1-i}+\binom{N_1}{N_1-n_1}x^{N_1-n_1}(1-x)^{n_1}u_1=1-\frac{\alpha}{2},$$
$$\sum_{i=1}^{N_1-n_1-1}\binom{N_1}{i}x^i(1-x)^{N_1-i}+\binom{N_1}{N_1-n_1}x^{N_1-n_1}(1-x)^{n_1}u_2=\frac{\alpha}{2},$$

u_1,u_2 为(0,1)上两个独立的均匀随机数,

$$a^*=[1+\frac{n_1+1}{N_1-n_1}F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2n_1+2,2N_1-2n_1)]^{-1},$$

$$b^*=[1+\frac{n_1}{N_1-n_1+1}F_{\frac{\alpha}{2}}(2n_1,2N_1-2n_1+2)]^{-1}.$$

(二) 仅带有随机增添的定时截尾试验情形:此时失落率 $\mu=0$,故失落数 $\omega_1=\omega_2=0$,由(11)式得产品的可靠度 $R(t)=ae^{-\lambda t}+\frac{b}{v-\lambda}(ve^{-\lambda t}-\lambda e^{-vt})$ 由(19),(20)式得 $T=\sum_{k=1}^{r_1}x_k+\sum_{j=1}^{r_2}y_j+\sum_{i=1}^{n_2}z_i+n_1t_0,\hat{\lambda}=\frac{1}{\hat{\theta}}=\frac{r_1+r_2}{T},\ \hat{v}=\frac{1}{\hat{\psi}}=\frac{N_2}{T_0},\hat{R}(t)=ae^{-\hat{\lambda}t}+\frac{b}{\hat{v}-\hat{\lambda}}(\hat{v}e^{-\hat{\lambda}t}-\hat{\lambda}e^{-\hat{v}t}).$

特别指出,当随机失落及随机增添都不发生的情形,即与通常的定时截尾试验结果相同.另在 2 中所得基本结果完全可以推广到定数截尾试验及失效后产品有替换的截尾试验情形,已得到相应的结果.

参 考 文 献

[1] 曹晋华、程侃,可靠性数学引论,科学出版社,1986.

[2] 陈友华,一类实验数据的统计处理,应用概率统计,9(1),1993.

The Definite Time Censorship Test with Stochastic Lose and Stochastic Add

Zhang Liancheng　　Qi Yanshen　　Fu Denzhi

(Shengyang Institute of Technology, Shengyang 110015)

Abstract

A method is proposed to estimate reliability parameters of products whose life satisfy exponential distribution model, under the definite time censorship longevity test with stochastic lose and stochastic add.

Keywords stochastic lose, stochastic add, definite time censorship.