第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　Feb. 1996

关于点可数覆盖*

刘　川
(广西大学数学与信息科学系，南宁 530004)

摘　要　本文证明了(1)具有点可数基空间的商 s- 像 X 有点可数基的充要条件是 X 是 q- 空间；(2)度量空间的伪开 s- 像若满足条件(∗)，则它在伪开 s- 映射下是保持的；(3)给出反例否定地回答了[1]和[2]中的问题.

关键词　k- 网，cs^*- 网，点可数，s- 映射，伪开映射，商映射.
分类号　AMS(1991) 54E18, 54E40/CCL O189.11

点可数覆盖是广义度量空间中的重要概念，具有各种性质的点可数覆盖被许多拓扑学家所讨论[1],[2],[4],[5]. 本文通过对点可数 k- 网和点可数 cs^*- 网的研究，改进了[5]中的定理和部分地回答了[1]中的问题 10.2. 最后给出反例否定地回答了[1]中的问题 10.4 及[2]中的一个问题.

本文所讨论的空间均指的是正则 T_1 空间，映射都是连续到上的. 文中未定义的术语、符号以[1]为准.

定义　拓扑空间 X 称为 q- 空间，如果对任意的 $x\in X$，存在 X 的紧子集 C，使 $x\in C$，且 C 有可数特征. X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的一个 cs^*- 网[3]，如果对 X 中任一收敛于 $x\in X$ 的收敛序列 $\{x_n:n\in N\}$，U 是 x 的邻域，则存在 $P\in\mathscr{P}$，使 $x\in P\subset U$，P 含有 $\{x_n:n\in N\}$ 的子列. X 的子集 A 称为 X 的 α- 仿紧子集[6]，如果对 X 中开集组成的 A 的任一覆盖 $\mathscr{U}$，存在 X 中的开集族 $\mathscr{V}$，$\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$，$\bigcup\mathscr{V}\supset A$，且 $\mathscr{V}$ 是局部有限的. X 称为满足性质(∗)，若 X 中的任一遗传 Lindelöf，遗传可分的子空间都有一可数稠密的 α- 仿紧子集.

定理 1　有点可数基空间的商 s- 像 X 有点可数基的充分必要条件是 X 是 q- 空间.

证明　只需证明充分性. 对 $x\in X$，由于 X 是 q- 空间，则存在有可数特征的可数紧子集 C，使 $x\in C$. 由[1]中定理 7.1(g)和定理 4.1，C 是可度量的. 从而 X 是第一可数的. 又 X 有点可数 k- 网[1]，因此 X 有点可数基([1]，推论 3.6).

注　定理 1 改进了 Filippov[5] 的定理：度量空间的商 s- 像有点可数基的充分必要条件是它有点可数型.

[1]中提出问题"度量空间的伪开 s- 像是否被伪开 s- 映射所保持"([1]，问题 10.2)？下面的定理部分地回答该问题.

定理 2　设 X 是满足性质(∗)的度量空间的伪开 s- 像，$f:X\to Y$ 是伪开 s- 映射. 则 Y 也是度量空间的伪开 s- 像.

* 1993年3月16日收到. 95年7月收到修改稿. 国家自然科学基金资助课题.

证明 Tanaka[3] 证明了"X 是度量空间的伪开 s- 像的充分必要条件是 X 是 Fréchet 空间且有点可数 cs^*- 网,Y 是 Fréchet 空间是显然的. 只需证明 Y 有点可数 cs^*- 网即可. 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 cs^*- 网. 对 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可分的. 注意到度量空间的商 s- 像有点可数 k- 网[1] 而点可数 k- 网是遗传的[1],可知 $f^{-1}(y)$ 是 $\aleph_0$- 空间([1],定理 5.2),因此它是遗传 Lindelöf,遗传可分的.

令 $D(y)$ 表示 $f^{-1}(y)$ 的可数稠密的 α- 仿紧子集,

$$D = \bigcup\{D(y): y \in Y\}, \mathscr{W} = \{f(P \cap D): P \in \mathscr{P}\}.$$

(1) $\mathscr{W}$ 是 Y 的点可数覆盖

显然 $\bigcup \mathscr{W} = Y$, 对 $y \in Y$, $D(y)$ 可数, $\mathscr{P}$ 是点可数族,则

$$\operatorname{ord}(D(y), \mathscr{P}) = |\{P \in \mathscr{P}, D(y) \cap P \neq \varnothing\}| \leqslant \omega.$$

故 $\operatorname{ord}(y, \mathscr{W}) \leqslant \omega$.

(2) $\mathscr{W}$ 是 Y 的 cs^*- 网.

设 $\{y_n: n \in N\}$ 收敛于 y, U 是 y 的邻域,不妨设 $y_n \neq y\,(n \in N)$,则

$$D(y) \cap \operatorname{cl}(\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\}) \neq \varnothing.$$

否则,对 $x \in D(y)$,存在 x 的邻域 $V(x)$,使 $V(x) \cap \operatorname{cl}(\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\}) = \varnothing$. 取子空间 $f^{-1}(y)$ 中的开集 $W(x)$ 使 $x \in W(x) \subset \operatorname{cl}_{f^{-1}(y)} W(x) \subset V(x) \cap f^{-1}(y)$. $\{W(x): x \in D(y)\}$ 是 $D(y)$ 的开覆盖,由 α- 仿紧性,存在 $\{W(x): x \in D(y)\}$ 的局部有限的开加细 $\mathscr{R}$.

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) = \operatorname{cl}_{f^{-1}(y)}(D(y)) &\subset \operatorname{cl}_{f^{-1}(y)}(\bigcup \mathscr{R}) \subset \bigcup\{\operatorname{cl}_{f^{-1}(y)} R: R \in \mathscr{R}\} \\ &\subset \bigcup\{\operatorname{cl}_{f^{-1}(y)}(W(x)): x \in D(y)\} \subset \bigcup\{V(x): x \in D(y)\} \end{aligned}$$

令 $V = \bigcup\{V(x): x \in D(y)\}$,则 $f^{-1}(y) \subset V$,且

$$V \cap \operatorname{cl}(\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\}) = \varnothing. \qquad (**)$$

f 是伪开映射且 $\{y_n: n \in N\}$ 收敛于 y,则

$$\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\}$$

不是闭的. 而

$$f^{-1}(y) \cup (\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\})$$

是闭的. 故 $V \cap \operatorname{cl}(\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\}) \neq \varnothing$. 这与$(**)$式矛盾.

取 $x_0 \in D(y) \cap \operatorname{cl}(\bigcup\{f^{-1}(y_n): n \in N\})$. 由于 X 是 Fréchet 空间,存在$\{x_n: n \in N\} \subset \bigcup\{D(y_n): n \in N\}$,使 $x_n \to x_0$. 对 $i \in N$, $\{x_n: n \in N\} \cap (\bigcup_{n \geqslant i} D(y_n)) \neq \varnothing$(否则存在 $i_0 \in N$,使$\{x_n: n \in N\} \subset \bigcup_{n < i_0} f^{-1}(y_n)$, $x_0 \in \operatorname{cl}(\{x_n: n \in N\}) \subset \bigcup_{n < i_0} f^{-1}(y_n)$,矛盾).

$\mathscr{P}$ 是 X 的 cs^*- 网,因此存在 $P \in \mathscr{P}$,使 $x_0 \in P \subset f^{-1}(U)$,且 P 含有$\{x_n: n \in N\}$ 的子列. $x_0 \in P \cap D \subset f^{-1}(U)$, $y \in f(P \cap D) \subset U$,且 $f(P \cap D)$ 含有$\{y_n: n \in N\}$ 的子列,这就证明了 $\mathscr{W}$ 是 Y 的点可数 cs^*- 网.

下面的例子否定地回答了[1]中的问题 10.4:具有点可数 k- 网的 k- 空间是否被商 s- 映射保持?[2] 中的问题:点可数 k- 网是否被商、紧映射所保持?

例 存在具有点可数 k- 网的 k- 空间 X 及到 Y 上的商,紧映射 f, Y 没有点可数 k- 网.

证明 设 R 表示实直线赋予通常拓扑, $S = [0,1)$, $X = (R \times \{1\}) \cup (S \times \{0\})$,定义 X 中的拓扑如下:对于 $R \times \{1\}$ 中的点,其基本邻域与作为 R^2 的子空间的邻域相同. 对于$(a,0)$

$\in S\times\{0\}$ 定义 $V((a,0))=\{(a,0)\}\cup V_m$，$V_m$ 是集合 $t_a(m)=\{(n+a,1):n\geqslant m\}$ 的任何邻域，其中 $m\in N$.

(1) X 是正则的.

对 $(a,0)\in S\times\{0\}$，$\{(a,0\}\cup V_m$ 是 $(a,0)$ 的一个基本邻域，对于点 $(n+a,1)(n\geqslant m)$，取 $R\times\{1\}$ 中邻域 W_n，使 $(n+a,1)\in W_n\subset\overline{W}_n\subset V_n$. 令 $W=\{(a,0)\}\cup(\bigcup\{W_n:n\geqslant m\})$，则 W 是 $(a,0)$ 的邻域. 令

$$W'_n=(n+a-\frac{1}{n},n+a+\frac{1}{n})\times\{1\},W'=\{(a,0)\}\cup(\{W'_n:n\geqslant m\}),$$

则 $(a,0)\in W\cap W'\subset\overline{W\cap W'}\subset\{(a,0)\}\cup V_m$. 对 $(r,1)\in R\times\{1\}$ 的验证是显然的.

(2) X 有点可数 k- 网.

对 $(a,0)\in S\times\{0\}$，令 $\{a_n:n\in N\}$ 是 R 中收敛于 a 的序列，

$$X_1=\bigoplus_{a\in S}(\{a\}\cup\{a_n:n\in N\})\oplus R,$$

显然 X_1 是一度量空间，定义

$$f:X_1\to X;\text{对 } x\in R,f(x)=(x,1),f(a)=(a,0),f(a_n)=(a+n,1),$$

则 f 是 s- 映射. 下面证明 f 是商映射.

设 $A\subset X$，$f^{-1}(A)$ 是 X_1 的闭集. 若 A 不是 X 的闭集，则 $\overline{A}\setminus A\neq\varnothing$，取 $\varepsilon\in\overline{A}\setminus A$，则 $\varepsilon=(a,0)\in S\times\{0\}$，因此 $|t_a(1)\cap(A\cap R\times\{1\})|\geqslant\omega$，所以 $\{(a+n,1):n\in N\}$ 中有无限多个点含于 $A\cap R\times\{1\}$ 中. 这意味着 $f^{-1}(A)$ 含有 $\{a_n:n\in N\}$ 的子序列，$a\in\mathrm{cl}_{X_1}(f^{-1}(A))\setminus f^{-1}(A)$. 即 $f^{-1}(A)$ 不是 X_1 的闭集，矛盾. 因此 f 是商映射.

由于度量空间的商 s- 像必有点可数 k- 网[1]，所以 X 有点可数 k- 网.

(3) 构造空间 Y 及商，紧映射 $\varphi:X\to Y$.

设 $T_n=[2n+1,2n+2]\times\{1\}$，$\{T_{n,k}:k\leqslant 2^n\}$ 是 T_n 上的 Cantor 不连续统的标准构造中在第 n 步所获得的线段族，令

$$\mathscr{R}=\{T_{n,k}:n\in N,k\leqslant 2^n\}\cup\{\{x\}:x\in X\setminus\bigcup\{T_{n,k}:n\in N,k\leqslant 2^n\}\}.$$

由此划分得到一商空间 $Y=X/\mathscr{R}$，$\varphi:X\to Y$ 是一商、紧映射，当然它也是商 s- 映射.

(4) Y 没有点可数 $k-$ 网.

X 中序列 $\{x_n=(n+a,1):n\in N\}$ 收敛于 $(a,0)$，Y 中序列 $\{\varphi(x_n)\}$ 收敛于 $\varphi((a,0))$. 存在 $\varphi((a,0))$ 的邻域 V 使 $\mathrm{cl}_Y(V)\cap\varphi(S\times\{0\})=\varphi((a,0))$.

事实上，令 $B_n=\{(y,1)\in R\times\{1\}:d((y,1),\varphi^{-1}(\varphi(x_n))\leqslant 3^{-n-1}\}$（其中 d 是 R^2 上的普通度量），$W_n((a,0))=\{(a,0)\}\cup(\bigcup\{B_m:m\geqslant n\})$，则 $W_n((a,0))$ 是 $(a,0)$ 的一个邻域且 $\varphi^{-1}(\varphi(W_n(a,0)))=W_n(a,0)$，故 $V_n(\varphi(a,0))=\varphi(W_n(a,0))$ 是 $\varphi((a,0))$ 的邻域. 对 $\beta\neq a$，$n\in N$，存在 $m\in N$，使 $W_m(\beta,0)\cap W_n((a,0))=\varnothing$，从而 $\varphi((\beta,0))\overline{\in}\mathrm{cl}_Y(V_n(\varphi(a,0)))$，取 V 为任意的 $V_n(\varphi(a,0))$ 即可.

设 $\mathscr{P}$ 是 Y 的 k- 网，则存在 $\mathscr{P}_a\subset\mathscr{P}$，$|\mathscr{P}_a|<\omega$ 使 $\{\varphi(x_n)\in V:n\in N\}\subset\bigcup\mathscr{P}_a\subset V$，令

$$\mathscr{P}'_a=\{P\in\mathscr{P}_a:\varphi((a,0))\in\overline{P}\},Q_a=\bigcup\mathscr{P}'_a,$$

则存在 $n(a)\in N$ 使 $n\geqslant n(a)$ 时，$\varphi(x_n)\in Q_a$. 设 K 表示 $[0,1]$ 上的 Cantor 不连续统，$K'=K\cap S$，则 $|K'|>\omega$. 对 $(a,0)$（其中 $a\in K'$），存在 $n(a)\in N$ 使 $n\geqslant n(a)$ 时，$\varphi(x_n)\in Q_a$. 由于

$|K'| > \omega$,则存在 $n_0 \in N$,$K'' = \{\alpha \in K' : n(\alpha) = n_0\}$,$|K''| > \omega$. $\{T_{n_0,k} : k \leqslant 2^{n_0}\}$ 是有限的,这意味着存在 k_0,使 $|\{\alpha \in K'', T_{n_0,k_0} \cap t_{(\alpha,0)}(n_0) \neq \varnothing\}| > \omega$. 设 $a = \varphi(T_{n_0,k_0})$,则 $a \in Q_\alpha$,$a \in \{\alpha \in K'' : T_{n_0,k_0} \cap t_{(\alpha,0)}(n_0) \neq \varnothing\}$,设 $P_\alpha \in \mathscr{P}_\alpha$,$a \in \overline{P}_\alpha$. 由于 $\overline{P}_\alpha \cap \varphi(S \times \{0\}) = \{\varphi((\alpha,0))\}$,即对 $\alpha \neq \beta$,有 $P_\alpha \neq P_\beta$,所以 $\mathscr{P}$ 在点 a 处不是点可数的.

参 考 文 献

[1] G. Gruenhage, E. Michael and Y. Tanaka, *Spaces determined by point-countable covers*, Pacific J. Math., 113(1984), 303—332.

[2] Liu Chuan, *Note on point-countable k-networks*, Question and Answers in General Topology, 9 (1991), 167—170.

[3] Y. Tanaka, *Point-countable covers and k-networks*, Top. Proc., 12(1987), 327—349.

[4] D. Burke and E. Michael, *On certain point-countable covers*, Pacific. J. Math., 64(1976), 79—92.

[5] V. V. Filippov, *Quotient spaces and the multiplicity of a base*, Mat. Sb., 80:4(1968), 521—532.

[6] C. E. Aull, *Paracompact subsets*, Proceeding of the Second Progul Symposium, 1966, 45—51.

On Point-Countable Covers

Liu Chuan

(Guangxi University, 530004)

Abstract

We prove the following results: (1) A qustient s-images of spaces with a point-countable base has a point-countable base if and only if it is a q-space. (2) A pseudo-open s-image of metric space is preserved by pseudo-open s-mapping under the condition (*). (3) A example is given to answer the questions in [1] and [2] in the negative.

Keywords k-network, cs^*-network, s-mapping, point-countable, pseudo-open mapping, quotient mapping.