第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

对格上Erceg式p.q.(p.)度量的注记*

彭育威

(西南民族学院数学系，成都610041)

摘　要　本文的主要结果是大幅度地简化了Erceg引入的不分明度量的无点化定义,建立了相应的点式刻画.

关键词　fuzzy格,way below关系,p.q.(p.)度量.

分类号　AMS(1991) 54A40/CCL O159

A. Erceg引入的不分明度量[1]颇为合理,但其定义的条目繁多,使用十分不便.本文将以连续格理论中的way below关系[2]为工具,对其定义进行大幅度的简化.在此基础上建立了与之等价的点式定义,其满足的条件既与分明度量的有关条件相应,又具有格上度量的特点.本文的结果不但为深入讨论L-fuzzy p.q.(p.)度量空间提供了方便[3],而且为建立p.q.度量分子格理论打下了基础[4].由于文[5]引入的完全分配格上的p.q.度量不以Erceg的定义为特例,而文献[6]对Erceg式的p.q.度量的点式刻划又严重依赖fuzzy格上的逆序对合对应,难以在完全分配格上实现,故本工作是对文[1,5,6]的必要补充.

本文中,L总表fuzzy格.如不加声明,大写英文字母A,B,C等总表L的元,小写英文字母a,b,c等表L的非零并既约元,$\ll$表L上的way below关系.$\beta^*(A)$表元A的正则极小集[7].

由于$a \ll A$当且仅当$a \in \beta^*(A)$,$\beta^*(\vee B_i) = \bigcup \beta^*(B_i)$.易知,

$$a \ll \vee B_i \Leftrightarrow a \in \beta^*(\vee B_i) \Leftrightarrow \text{存在} i \text{使} a \in \beta^*(B_i) \Leftrightarrow \text{存在} i \text{使} a \ll B_i,$$

从而如下命题成立.

命题1　$a \ll \vee B_i$当且仅当存在i使$a \ll B_i$.

定义1[1]　fuzzy格上的p.q.(p.)度量是满足如下条件$\langle M_1\rangle - \langle M_4\rangle$($\langle M_1\rangle - \langle M_5\rangle$)的映射$p: L \times L \to [0,\infty]$:

$\langle M_1\rangle$　$p(0,A) = \infty (A \neq 0)$; $p(A,A) = 0$, $p(A,0) = 0$;

$\langle M_2\rangle$　$p(A,C) \leqslant p(A,B) + p(B,C)$;

$\langle M_3\rangle$　(i) $A \leqslant B \Rightarrow p(A,C) \geqslant p(B,C)$;

(ii) $p(A, \vee B_i) = \vee p(A,B_i)$;

$\langle M_4\rangle$　若$p(C_i,B) < r \Rightarrow B \leqslant A$对$B$和$i \in \Gamma$成立,则$p(\vee C_i, E) < r \Rightarrow E \leqslant A$对$E$成立;

$\langle M_5\rangle$　对每个$r > 0$,$D_r^p = (D_r^p)^{-1}$.

---

* 1990年10月5日收到.95年7月20日收到修改稿.

这一定义条目繁多，使用不便，文献[7]给出了如下刻画.

引理 1[8] 设 p 是 fuzzy 格 L 上的 p.q.(p.)度量，则 p 的相关邻域映射族 $\{D_r^p : r > 0\}$ 满足如下条件 $\langle A_1\rangle - \langle A_5\rangle(\langle A_1\rangle - \langle A_6\rangle)$：

$\langle A_1\rangle$ $D_r^p(0) = 0$；

$\langle A_2\rangle$ $A \leqslant D_r^p(A)$；

$\langle A_3\rangle$ $D_r^p(\vee A_i) = \vee D_r^p(A_i)$；

$\langle A_4\rangle$ $D_r^p \circ D_s^p \leqslant D_{r+s}^p$；

$\langle A_5\rangle$ $D_r^p = \vee \{D_s^p : s < r\}$；

$\langle A_6\rangle$ $D_r^p = (D_r^p)^{-1}$.

反之，若 L 上的映射族 $\{D_r : r > 0\}$ 满足 $\langle A_1\rangle - \langle A_5\rangle(\langle A_1\rangle - \langle A_6\rangle)$. 对任意 $A, B \in L$，定义 $p(A,B) = \wedge\{r : B \leqslant D_r(A)\}$，则 $p : L \times L \to [0,\infty]$ 是 L 上的 p.q.(p.)度量且 $D_r = D_r^p(r > 0)$.

引理 1 实质上是绕开距离函数而直接着眼于度量拓扑. 下面我们直接对定义 1 进行必要的简化.

定理 1 $p : L \times L \to [0,\infty]$ 是 fuzzy 格 L 上的 p.q.(p.)度量当且仅当 p 满足如下 $\langle B_1\rangle - \langle B_3\rangle(\langle B_1\rangle - \langle B_4\rangle)$：

$\langle B_1\rangle$ 若 $A \geqslant B$，则 $p(A,B) = 0$；若 $B \neq 0$，则 $p(0,B) = \infty$；

$\langle B_2\rangle$ $p(A,C) \leqslant p(A,B) + p(B,C)$；

$\langle B_3\rangle$ $\forall A, B \neq 0, p(A,B) = \vee\{\wedge\{p(a,b) : a \ll A\} : b \ll B\}$；

$\langle B_4\rangle$ $p(A,B) < r \Rightarrow C \leqslant B$ 等价于 $p(B',E) < r \Rightarrow E \leqslant A'$.

证明 *充分性* 易知 $\langle M_1\rangle$，$\langle M_2\rangle$ 和 $\langle M_3\rangle$(i) 成立. 下证 $\langle M_3\rangle$(ii) 成立. 由命题 1 知，

$$p(A, \vee B_i) = \vee\{\wedge p(a,b) : a \ll A\} : b \ll \vee B_i\} = \vee\{\wedge p(a,b) : a \ll A\} : b \ll 某 B_i\}$$
$$= \vee\{\vee\{\wedge p(a,b) : a \ll A\} : b \ll B_i\} : i\} = \vee p(A, B_i).$$

下证 $\langle M_4\rangle$ 成立. 假定 $p(C_i,B) < r \Rightarrow B \leqslant A$ 对 $B \in L$ 和 $i \in \Gamma$ 成立. 需证，若 $p(\vee C_i, E) < r$，则 $E \leqslant A$. 事实上，由

$$p(\vee C_i, E) = \vee\{\wedge p(a,b) : a \ll \vee C_i\} : b \ll E\} < r$$

知，$\forall b \ll E$ 存在 $a \ll \vee C_i$ 使 $p(a,b) < r$，而 $a \ll \vee C_i$ 意味着 $a \ll$ 某 C_i(命题 1). 由 $\langle M_3\rangle$(i) 知

$$p(C_i, b) = p(a,b) < r.$$

再由 $\langle M_4\rangle$ 的已知条件知 $b \ll A$，从而 $E \leqslant A$.

至于 $\langle M_5\rangle$ 成立，只需注意到如下事实即可. 对任意 $r > 0$，$D_r^p = (D_r^p)^{-1}$ 等价于，对任意的 $A, B \in L$，$A \geqslant D_r^p(B) \Leftrightarrow B' \geqslant D_r^p(A')$.

必要性 $\langle B_2\rangle$ 和 $\langle M_2\rangle$ 相同，$\langle B_4\rangle$ 和 $\langle M_5\rangle$ 等价. 下证 $\langle B_1\rangle$ 成立. 若 $A \geqslant B$，则由引理 1 知，$D_r(A) \geqslant A \geqslant B$，而 $p(A,B) = \wedge\{r : D_r^p(A) \geqslant B\}$，故知 $p(A,B) = 0$.

下证 $\langle B_3\rangle$ 成立，由引理 1 知 $p(A,B) < r \Leftrightarrow \forall b \in \beta^*(B), b \ll B \leqslant D_r^p(A) = \vee\{D_r^p(a) : a \ll A\} \Leftrightarrow \forall b \ll B$ 存在 $a \ll A$ 使 $p(a,b) < r$，从而

$$p(A,B) = \vee\{\wedge p(a,b) : a \ll A\} : b \ll B\}.$$

证毕.

下文中 $J(L)$ 表 L 的所有非零并既约元所成之集.

引理 2 设 $p: L\times L\to[0,\infty]$ 是 fuzzy 格 L 上的 p.q. 度量,p 是 p. 度量的充要条件是对任意的 $a,b\in J(L)$ 和 $r>0$ 存在 $y\not\leq b'$ 使得 $p(a,y)<r$ 等价于存在 $x\not\leq a'$ 使得 $p(x,b)<r$.

证明 由 D_r^p 和 $(D_r^p)^{-1}$ 的定义易知 $D_r^p=(D_r^p)^{-1}$ 当且仅当 $\forall\, a,b\in J(L)$,$D_r^p(a)\not\leq b'\Leftrightarrow D_r^p(b)\not\leq a'$. 基于此,存在 $y\not\leq b'$ 使 $p(a,y)<r$ 等价于 $D_r^p(a)=\bigvee\{y:p(a,y)<r\}\not\leq b'$,又等价于 $D_r^p(b)=\bigvee\{x:p(b,x)<r\}\not\leq a'$,这又等价于存在 $x\not\leq a'$ 使 $p(b,x)<r$. 证毕.

若将 p 在 $J(L)\times J(L)$ 上的限制记为 d,即得到 L 上的点式距离函数如下:

定义 2 映射 $d: J(L)\times J(L)\to[0,\infty)$ 称为 fuzzy 格 L 上的点式 p.q.(p.) 度量,若 d 满足如下条件 $\langle B_1\rangle-\langle B_3\rangle$($\langle B_1\rangle-\langle B_4\rangle$):

$\langle B_1\rangle$ 若 $a\geqslant b$,则 $d(a,b)=0$;

$\langle B_2\rangle$ $d(a,c)\leqslant d(a,b)+d(b,c)$;

$\langle B_3\rangle$ $d(a,b)=\bigvee\{\bigwedge\{d(x,y):x\ll a\}:y\leqslant b\}$;

$\langle B_4\rangle$ 存在 $y\not\leq b'$ 使 $d(a,y)<r$ 当且仅当存在 $x\not\leq a'$ 使 $d(b,x)<r$.

对每个 $r>0$,定义映射 $D_r^d: L\to L$,$D_r^d(0)=0$,$D_r^d(A)=\bigvee\{b\in J(L):$ 存在 $a\ll A$ 使 $d(a,b)<r\}$.

定理 2 设 p 是 fuzzy 格 L 上的 p.q.(p.) 度量,则 $d=p\,|J(L)\times J(L)$ 是 L 上的 p.q.(p.) 点式度量且 $d(a,b)=\bigwedge\{r:b\leqslant D_r^p(a)\}$. 反之,若 d 是 L 上的 p.q.(p.) 点式度量,则由 $p(0,B)=\infty(B\neq 0)$,$p(A,0)=0$,$p(A,B)=\bigvee\{\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}:b\ll B\}(A,B\neq 0)$ 定义的映射 $p: L\times L\to[0,\infty]$ 是 L 上的 p.q.(p.) 度量且是 d 在 $L\times L$ 上的扩张,映射族 $\{D_r^d: r>0\}$ 恰是 p 的相关邻域映射族.

证明 定理的第一部分由定理 1,引理 2 和定义 2 推出. 现证定理的第二部分.

(1) 设 $A\geqslant B>0$,由 $\forall\, b\ll B\leqslant A=\bigvee\{a\in J(L):a\ll A\}$ 知存在 $a\ll A$ 使得 $b\leqslant a$,从而 $d(a,b)=0$. 这样 $\forall\, b\ll B$,$\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}=0$,即

$$p(A,B)=\bigvee\{\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}:b\ll B\}=0.$$

再注意到 p 的定义式 $p(0,B)=\infty(B\neq 0)$,$p(A,0)=0$,易知映射 p 满足定理 1 中的条件 $\langle B_1\rangle$.

(2) 现证 p 满足定理 1 的条件 $\langle B_2\rangle$. 不失一般性,设 $A,B,C\neq 0$,对任意 $a\ll A$,$b\ll B$,$c\ll C$,由 d 的条件 $\langle B_2\rangle$ 知 $d(a,c)\leqslant d(a,b)+d(b,c)$. 进而有

$$\bigwedge\{d(a,c):a\ll A\}\leqslant\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}+d(b,c).$$

由于上式对每个 $b\ll B$ 成立,故有

$$\bigwedge\{d(a,c):a\ll A\}\leqslant\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}+\bigwedge\{d(b,c):b\ll B\}.$$

从而有

$$\begin{aligned}\bigvee\{\bigwedge\{d(a,c):a\ll A\}:c\ll C\}&\leqslant\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}+\bigvee\{\bigwedge\{d(b,c):b\ll B\}:c\ll C\}\\&\leqslant\bigvee\{\bigwedge\{d(a,b):a\ll A\}:b\ll B\}+\bigvee\{\bigwedge\{d(b,c):b\ll B\}:c\ll C\}.\end{aligned}$$

即 $p(A,C)\leqslant p(A,B)+p(B,C)$.

(3) 由 p 的定义式和 d 的性质 $\langle B_3\rangle$,易推得 p 满足定理 1 中的条件 $\langle B_3\rangle$ 且 $\forall\, a,b\in$

$J(L)$,

$$p(a,b)=d(a,b).$$

(4) 综上所述,若 d 是点式 p.q. 度量,则由它扩张得到的 p 是 Erceg 式 p.q. 度量. 由引理 2 知,p 是 p. 度量当且仅当 p 还满足条件 $\langle B_4\rangle$.

(5) 最后证 $D_r^d=D_r^p(r>0)$. 注意 $d=p\,|J(L)\times J(L)$. 不失一般性,设 $A\neq 0$,若存在 $a\ll A$ 使 $d(a,b)<r$,则 $p(a,b)<r$,从而 $b\leqslant D_r^p(a)\leqslant D_r^p(A)$,又由 b 的任意性和 $D_r^d(A)$ 的定义知 $D_r^d(A)\leqslant D_r^p(A)$. 反之,若 $B\leqslant D_r^p(A)$,则 $p(A,B)=\vee\{\wedge\{d(a,b):a\ll A,b\ll B\}<r$,故对每个 $b\ll B$ 存在 $a\ll A$ 使 $d(a,b)<r$,从而 $B\ll D_r^d(A)$. 这样有 $D_r^p(A)\leqslant D_r^d(A)$. 证毕.

注 1 定义 2 中的 $\langle B_3\rangle$ 体现 L 的非零既约元所特有的点集双重性. L 为 Boolean 格时,$\langle B_3\rangle$ 是平庸的. 由于定义 2 中的 $\langle B_1\rangle$—$\langle B_3\rangle$ 和 L 上的对合对应无关,所以定理 2 还提示 p.q. 度量理论可以推广到完全分配格上. 基于此,我们已在文[4] 中建立了 p.q. 度量分子格理论.

注 2 定理 2 恰是文[1] § 9 中希望得到的结果.

参 考 文 献

[1] A. Erceg, JMAA, 58(1977), 559—571.

[2] G. Gierz, *A Compendium of Continuous Lattice*, Spring-Verlag, 1980.

[3] Peng Yuwei, FSS, 54(1993), 181—189.

[4] 彭育威, 数学年刊, 13A:3(1992), 353—359.

[5] 杨乐成, 科学通报, 33:4(1988), 247—250.

[6] 梁基华, 数学学报, 30:6(1987), 733—741.

[7] 王国俊, 数学学报, 29:4(1986), 539—541.

[8] 梁基华, 数学年刊, 6A:1(1984), 59—67.

A Note on Erceg's p.q. (p.) Metric for Lattices

Peng Yuwei

(Dept. of Math., Southwest Nationalies Institutes, Chengdu 610041)

Abstract

The definition of Erceg's p.q. (p.) metric for fuzzy lattices is simplified, and the relevant characterization is given.

Keywords fuzzy lattices, p.q. (p.) metric.