第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

关于McCoy定理*

章聚乐　　杜先能
(安徽师范大学数学系，芜湖)

关键词　素理想，m-系，$*$-素子模，对偶模.
分类号　AMS(1991) 16D30/CCL O153.3

本文中，R 表示有单位元的结合环，M 表示左 R-模，并且 M 的对偶模 $\mathrm{Hom}_R(M,R)$ 记为 M^*. 模 M 的子模 $L(\neq M)$ 称为 $*$-素的[1]，如果对于 $x,y\in M$ 使 $(xM^*)y\subseteq L$，恒有 $x\in L$ 或 $y\in L$. 易知，$*$-素子模的概念是素左理想概念[2]的推广.

命题1　设 L 是 M 的子模，$L\neq M$，则下列条件是等价的：

(1)　L 是 $*$-素子模.

(2)　$((Rx)M^*)(Ry)\subseteq L$，就一定有 $x\in L$ 或者 $y\in L$，对于所有 $x,y\in M$ 成立.

(3)　对于 M 的所有子模 X,Y 使 $(XM^*)Y\subseteq L$，则有 $X\subseteq L$ 或 $Y\subseteq L$.

假定 L 是 M 的子模，称 L 是 M 的优子模，如果对于所有 $x\in L$ 与 $a\in M^*$ 有 $(xa)M\subseteq L$. 易知：O，M 均是 M 的优子模；M 的优子模的交是 M 的优子模；如果 X,Y 是 M 的优子模，则 $X+Y$ 也是 M 的优子模；如果 $S\subseteq M$，则 $\ll S\gg=\bigcap\{K\mid S\subseteq K, K$ 是 M 的优子模$\}$ 是 M 的优子模，且对任意 $x\in M$ 有 $\ll x\gg=Rx+((Rx)M^*)M$.

命题2　如果 L 是 M 的子模，则

$$(L|M)=\{x\in M|Rx+R(xa)M\subseteq L,\ \forall\ a\in M^*\}$$

是 M 的优子模，且 $(L|M)\subseteq L$.

记 $N(M)=\bigcap\{L|L$ 是 M 的 $*$-素子模$\}$. 不难看出：当 $M=R$ 时，$N(M)$ 恰是环 R 的素根.

定理3　$N(M)=\bigcap\{L|L$ 是 M 的 $*$-素优子模$\}$.

命题4　设 $K(\neq M)$ 是 M 的优子模，则下列条件是等价的：

(1)　K 是 $*$-素的.

(2)　如果 X,Y 是 M 的子模使 $K\not\subseteq X$ 且 $K\not\subseteq Y$，则 $(XM^*)Y\not\subseteq K$.

(3)　$(\ll x\gg M^*)\ll y\gg\subseteq K$，就一定有 $x\in K$ 或 $y\in K$，对所有 $x,y\in M$ 成立.

(4)　对所有优子模 X,Y 使 $(XM^M)Y\subseteq K$，则一定有 $X\subseteq K$ 或 $Y\subseteq K$.

(5)　如果 X,Y 是 M 的优子模使 $K\not\subseteq X$ 且 $K\not\subseteq Y$，则 $(XM^*)Y\not\subseteq K$.

设 $V\subseteq M$，如果对于任意 $x,y\in V$，总存在 $a\in M^*$ 使 $(xa)y\in V$，则称 V 是 M 的 m-系. 易知，环 R 的子集 V 是 R 的 m-系当且仅当 V 是 ${}_RR$ 的 m-系.

定理5　假设 L 是 M 的子模. L 是 $*$-素的当且仅当 $C(L)=M\backslash L$ 是 M 的 m-系.

* 1992年11月16日收到. 94年3月16日收到修改稿.

假定 K 是 M 的优子模，V 是 M 的 m-系且使 $K\cap V=\varnothing$，记

$$S_{K,V}=\{L\mid L\text{ 是 }M\text{ 的优子模使 }K\subseteq L\text{ 且 }V\cap L=\varnothing\},$$

易知 $S_{K,V}$ 是归纳集合. 根据 Zorn 引理，$S_{K,V}$ 有极大元，且记其一为 $m(K,V)$.

定理 6　设 K 是 M 的优子模. 如果 V 是 M 的 m-系且 $K\cap V=\varnothing$，则 $m(K,V)$ 是 M 的 $*$-素优子模.

定理 7　设 K 是 M 的优子模. 如果 V 是 M 的 m-系且 $K\cap V=\varnothing$，则存在 M 的 $*$-素优子模 K' 使 $K\subseteq K'$ 且 $K'\cap V=\varnothing$.

假定 K 是 M 的优子模，M 的 $*$-素优子模 P 称为属于 K 的极小 $*$-素优子模，如果 $K\subseteq P$ 且不存在 M 的 $*$-素优子模 P' 使 $K\subseteq P'\subsetneqq P$.

定理 8　设 K 是 M 的优子模. M 的子模 P 是属于 K 的极小 $*$-素优子模当且仅当 $C(P)=M\backslash P$ 是 $T(K)=\{V\mid V\text{ 是 }M\text{ 的 }m\text{-系且 }V\cap K=\varnothing\}$ 中的极大元.

定理 9　如果 K 是 M 的优子模，那么

$$\begin{aligned}&\bigcap\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 的 }*\text{-素优子模且 }K\subseteq P\}\\&=\bigcap\{P\mid P\text{ 是属于 }K\text{ 的极小 }*\text{-素优子模}\}\\&=\{x\in M\mid \text{任含有 }x\text{ 的 }m\text{-系定含 }K\text{ 中元素}\}.\end{aligned}$$

令 $K=\{0\}$，立即得到

推论[3]　$\bigcap\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 的 }*\text{-素优子模}\}=\bigcap\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 的极小 }*\text{-素优子模}\}=\{x\in M\mid\text{任含 }x\text{ 的 }m\text{-系定含有 }0\}$.

由此推论，结合定理 3，立即得到模 M 的子模 $N(M)$ 的重要刻划：

定理 10　设 M 是左 R-模，则

$$\begin{aligned}N(M)&=\bigcap\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 的 }*\text{-素子模}\}=\bigcap\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 的 }*\text{-素优子模}\}\\&=\bigcap\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 的极小 }*\text{-素优子模}\}=\{x\in M\mid\text{任意含 }x\text{ 的 }m\text{-系定含 }0\}.\end{aligned}$$

由此，立即得到环论中著名的 McCoy 定理：

推论[4]　设 R 是环，那么 $N(R)=\bigcap\{I\mid I\text{ 是 }R\text{ 的素左理想}\}=\bigcap\{I\mid I\text{ 是 }R\text{ 的素理想}\}=\bigcap\{I\mid I\text{ 是 }R\text{ 的极小素理想}\}=\{x\in R\mid\text{任意含 }x\text{ 的 }m\text{-系定含 }0\}$.

定理 11　设 M 和 S 均为左 R-模，$f\in\mathrm{Hom}_R(M,S)$. 如果 L 是 S 的 $*$-素子模，则 $f^{-1}(L)$ 是 M 的 $*$-素子模，或 $f^{-1}(L)=M$.

参 考 文 献

[1]　杜先能，关于严素模与严半素模，数学季刊，5(3)(1990)，97—99.

[2]　K. Koh，*On one sided ideals of prime type*，Proc. Amer. Math. Soc.，28(1971)，321—329.

[3]　R. Mcdonald，*Ring theory and algebra*，Vol. 3，Proc. of The Third Oklahoma Conference，Marcel Dekker，1980.

[4]　C. Faith，*Ring Theory*，Springer-Verlag，1976.