第16卷第1期　　数学研究与评论　　Vol. 16 No. 1
1996年2月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　Feb. 1996

保特征2的域上幂等矩阵的线性算子*

曹重光　　张 显　　刘国桐
(黑龙江大学数学系，哈尔滨 150080)　(白城师专数学系，吉林 137000)

摘　要　设F是特征2的域. 本文确定F上$n\times n$矩阵保幂等性的可逆的线性算子的半群$H(F)$的结构，同时回答了文献[1]提出的两个未解决的问题.

关键词　特征2的域，幂等距阵，线性算子.
分类号　AMS(1991) 15A04/CCL O151.21

§1　引　言

本文中F表示特征数为2的域，F_2为两个元素的域. $\mu_n(F)$记F上$n\times n$矩阵的集，简记为μ. 设f为μ到自身的线性算子. 若f把一切幂等阵都映成幂等阵，则称f为保幂等的；若f还把非幂等矩阵变为非幂等距阵则称f称为强保幂等的. 设$H(F)$为可逆且保幂等的线性算子全体构成的半群，$\Phi(F)$为强保幂等线性算子全体构成的半群. 文[1]中最后一节提出了两个未解决的问题

(1)　$H(F_2)$的生成元是什么？

(2)　是否存在特征为2的无限域F使$\Phi(F)$是$H(F)$的真子集？

本文给出$H(F)$的表达式刻画，同时也给出了上述问题的回答.

文中用E_{ij}表示(i,j)位置是1，其余位置是0的矩阵，I_n记n阶单位阵.

引理1[1]　设$A^2=A\in\mu$，则存在可逆阵$P\in\mu$使$PAP^{-1}=I_r\oplus O$.

引理2　设$T\in H(F)$，则$T(I_n)=I_n$. 由$T(E_{ii})^2=T(E_{ii})$及$T(I_n+E_{ii})^2=T(I_n+E_{ii})$得

$$T(I_n)T(E_{ii})T(I_n)=0,\quad \forall\ i. \tag{1}$$

由$T(E_{ii}+E_{ij})^2=T(E_{ii}+E_{ij})$得

$$T(E_{ii})T(E_{ij})+T(E_{ij})T(E_{ii})+T(E_{ij})^2=T(E_{ij}),\quad \forall\ i\neq j. \tag{2}$$

同理

$$T(E_{jj})T(E_{ij})+T(E_{ij})T(E_{jj})+T(E_{ij})^2=T(E_{ij}),\quad \forall\ i\neq j. \tag{3}$$

再由$T(I_n+E_{ii}+E_{ij})^2=T(I_n+E_{ii}+E_{ij})$及(1)，(2)得

$$T(I_n)T(E_{ij})+T(E_{ij})T(I_n)=0,\quad \forall\ i\neq j. \tag{4}$$

由(1)，(4)及T可逆知与$T(I_n)$交换的矩阵所生成的空间的维数为n^2，故$T(I_n)=I_n'$或O，但T可逆，必有$T(I_n)=I_n$.

---

* 1993年3月10日收到. 国家及黑龙江省自然科学基金资助项目.

引理 3 设 $T\in H(F)$，则 $T(E_{ii})$秩为 1 或 $n-1$.

证明 由 $T(E_{ii})$及 $T(E_{ii}+E_{jj})$幂等得

$$T(E_{ii})T(E_{jj})+T(E_{jj})T(E_{ii})=0,\quad \forall\, i\neq j. \tag{5}$$

由 $T(E_{ii}+E_{jj}+E_{kj})$幂等及(5)式得

$$T(E_{ii})T(E_{kj})+T(E_{kj})T(E_{ii})=0,\quad \forall\, i\neq j\neq k. \tag{6}$$

由引理 1 易见与 $T(E_{ii})$可交换的矩阵空间的维数为 $r^2+(n-r)^2$(其中 r 为 $T(E_{ii})$的秩). 再由 T 可逆及(5),(6)两式知 $r^2+(n-r)^2\geqslant n^2-2n+2$. 即 $(r-1)(n-r-1)\leqslant 0$. 由此推出 $r=0,1,n-1,n$，但 $r=0$ 或 n 意味着 $T(E_{ii})=0$ 或 $T(E_{ii}+I_n)=0$，这与 T 可逆矛盾. 证毕.

引理 4 设 $T\in H(F)$，则存在可逆阵 $P\in\mu$，使 $PT(E_{ii})P^{-1}$为对角阵对所有 i 同时成立.

证明 由 $T(E_{ii})^2=T(E_{ii})\neq 0$ 及(5)式可证.

引理 5 设 $T\in H(F)$，$F\neq F_2$ 则存在可逆阵 P 使下述之一成立

(i) $PT(E_{ii})P^{-1}=E_{ii}$, $\forall\, i$.　(ii) $PT(E_{ii})P^{-1}=I_n+E_{ii}$, $\forall\, i$.

但(ii)仅当 n 为偶数时成立.

证明 由引理 3 及引理 4，不失一般性不妨设(1)$T(E_{11})=E_{11}$或(2)$T(E_{11})=I_n+E_{11}$，且同时有 $T(E_{ii})=\mathrm{diag}(\varepsilon_1^{(i)},\cdots,\varepsilon_n^{(i)})$，$\forall\, i$，$\varepsilon_j^{(i)}=1$ 或 0.

当(1)发生时，若 $\varepsilon_1^{(2)}\neq 0$，不妨设 $T(E_{22})=E_{11}$或 $T(E_{22})=I_n+E_{22}$，由前者推出 $T(E_{11}+E_{22})=0$ 与 T 可逆矛盾，故只有后者. 此时因 $F\neq F_2$ 故有 $q\neq 0,1$，由 $T(E_{ii}+qE_{ij})$幂等得

$$T(E_{ii})T(E_{ij})+T(E_{ij})T(E_{ii})+T(E_{ij})=qT(E_{ij})^2. \tag{7}$$

由(2),(7)有

$$T(E_{ii})T(E_{ij})+T(E_{ij})T(E_{ii})+T(E_{ij})=0. \tag{8}$$

类似由(3)及(7)之相应式子可得

$$T(E_{jj})T(E_{ij})+T(E_{ij})T(E_{jj})+T(E_{ij})=0. \tag{9}$$

设 $T(E_{ij})=(a_{kl}^{(i,j)})_{n\times n}\in\mu$，由(8),(9)两式易得 $T(E_{12})=a_{12}^{(1,2)}E_{12}+a_{21}^{(1,2)}E_{21}$，再由 $T(E_{11}+E_{12})$幂等推出 $a_{12}^{(1,2)}\cdot a_{21}^{(1,2)}=0$，故 $T(E_{12})=a_{12}^{(1,2)}E_{12}$ 或 $a_{21}^{(1,2)}E_{21}$. 同理有 $T(E_{21})=a_{21}^{(2,1)}E_{21}$ 或 $a_{12}^{(2,1)}E_{12}$.

不妨设 $T(E_{12})=a_{12}^{(1,2)}E_{12}$，由 T 可逆易见 $T(E_{21})=a_{21}^{(2,1)}E_{21}$，将此代入

$$T[qE_{11}+E_{12}+(q+q^2)E_{21}+(1+q)E_{22}]^2=T[qE_{11}+E_{12}+(q+q^2)E_{21}+(1+q)E_{22}],$$

比较两端(1,1)位置得 $q+q^2=0$，这与 q 的假设矛盾，故 $\varepsilon_1^{(2)}\neq 0$ 不能发生，只有 $\varepsilon_1^{(2)}=0$. 此时不妨设 $T(E_{22})=E_{22}$或 I_n+E_{11}，但后者不能发生，事实上那时有 $T(E_{11}+E_{22})=T(I_n)$，但 $n\geqslant 3$，与 T 可逆矛盾. 故只有 $T(E_{22})=E_{22}$，类似继续可证结论(i).

当(2)发生，类似可证结论(ii). 但是需注意 n 为奇数 $T(I_n)=0$ 与 T 可逆矛盾，故(ii)成立当且仅当 n 为偶数.

引理 6 设 $T\in H(F)$，$F\neq F_2$，则有可逆阵 $P\in\mu$ 使下述之一成立

(i) $PT(E_{ij})P^{-1}=E_{ij}$, $\forall\, i,j$.　(ii) $PT(E_{ij})P^{-1}=E_{ji}$, $\forall\, i,j$.

证明 类似引理 5 证明中对 $T(E_{12})$的讨论，对于 $i\neq j$，不妨设 $T(E_{ij})=a_{ij}^{(i,j)}E_{ij}$或 $a_{ji}^{(i,j)}E_{ji}$. 现设 i,j,k 互不等，令 $T(E_{ij})=a_{ij}^{(i,j)}E_{ij}$，$T(E_{ik})=a_{ki}^{(i,k)}E_{ki}$，则由

$$T(E_{ii}+E_{ij}+E_{jk})=\varepsilon I_n+E_{ii}+a_{ij}^{(i,j)}E_{ij}+a_{ki}^{(i,k)}E_{ki}$$

是幂等阵可推出 $a_{ki}^{(i,k)}a_{ij}^{(i,j)}=0(\varepsilon=1,0)$，这与 T 可逆矛盾，故只有 $T(E_{ij})=a_{ij}^{(i,j)}E_{ij},\forall\ i\neq j$，或 $T(E_{ij})=a_{ji}^{(i,j)}E_{ji},\forall\ i\neq j$.

又由 $T(E_{ii}+E_{ij}+E_{ik}+E_{jk}+E_{kk})$ 幂等推出 $a_{ik}^{(i,k)}=a_{ij}^{(i,j)}a_{jk}^{(j,k)}$，又由 $T(E_{ii}+E_{ij}+E_{ik}+E_{ji}+E_{jj}+E_{jk}+E_{ki}+E_{kj}+E_{kk})$ 幂等推出 $a_{ij}^{(i,j)}a_{ji}^{(j,i)}=1$，于是结论不难由[1]之引理 2.4 推出.

定理 $T\in H(F)$ 当且仅当下述之一成立

(i) $F\neq F_2$，n 奇数或偶数，存在可逆阵 $P\in\mu$ 使得 $T(A)=PAP^{-1},\forall\ A\in\mu$.

(ii) $F\neq F_2$，n 奇数或偶数，存在可逆阵 $P\in\mu$ 使得 $T(A)=PA^tP^{-1},\forall\ A\in\mu$.

(iii) $F\neq F_2$，n 偶数，存在可逆阵 $P\in\mu$ 使得 $T(A)=PAP^{-1}+\mathrm{tr}(A)I_n,\forall\ A\in\mu$.

(iv) $F\neq F_2$，n 偶数，存在可逆阵 $P\in\mu$ 使得 $T(A)=PA^tP^{-1}+\mathrm{tr}(A)_n,\forall\ A\in\mu$.

(v) $F=F_2$，存在可逆阵 $P\in\mu$ 及线性函数 $f:\mu\to F_2$ 且 $f(I_n)=0$ 使得

$$T(A)=PAP^{-1}+f(A)I_n,\quad \forall\ A\in\mu.$$

(vi) $F=F_2$，存在可逆阵 $P\in\mu$ 及线性函数 $f:\mu\to F_2$ 且 $f(I_n)=0$ 使得

$$T(A)=PA^tP^{-1}+f(A)I_n,\quad \forall\ A\in\mu$$

证明 充分性不难验证，(v) 及 (vi) 中的条件 $f(I_n)=0$ 恰保证了 T 的可逆性，事实上若 $T(A)=0$，当 $f(A)=0$ 时易见 $A=0$，当 $f(A)=1$ 时推得 $A=I_n$，即 $f(I_n)=1$ 这与 $f(I_n)=0$ 矛盾，不能发生.

现证必要性. (i)—(iv)可由引理 5 及引理 6 推出. 注意 $F=F_2$ 时显然有 $H(F)\subseteq\Phi(F)$，再由[1]的定理 4.1 易见 T 有(v)，(vi)的算子形式为使 T 可逆自然要求 $f(I_n)=0$.

注 上述定理已经回答了[1]关于 $H(F)$ 的两个问题，事实上 $F\neq F_2$ 时 $H(F)=\Phi(F)$，不存在无限域使 $\Phi(F)$ 是 $H(F)$ 的真子集. $H(F_2)$ 的生成元除通常的相似，转置算子外还有算子 $X\to X+f(X)I_n$，其中 $f(I_n)=0$，显然有 $H(F_2)$ 是 $\Phi(F_2)$ 的真子集.

F 为特征 2 的域，一般的保幂等的线性算子的刻画仍未解决.

参 考 文 献

[1] L. B. Btasley and N. J. Pullman, *Linear operators preserving idempotent matrices over fields*, Lin Alg Appl., 146(1991), 7—20.

Linear Operators Preserving Idempotent Matrices over Fields of Characteristic 2

Cao Chongguang　　*Zhang Xian*

(Dept. of Math., Heilongjiang Univ., Harbin 150080)

Abstract

Suppose F is a field of characteristic 2. We determine the structure of the semigroup $H(F)$ of linear operators on the $n\times n$ matrices over F that are invertible and idempotence preserving. Two open problems are solved.

Keywords field, characteristic of field, idempotent matrix, linear operator.