第16卷第2期　　数学研究与评论　　Vol.16 No.2
1996年5月　　JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION　　May 1996

线性时滞系统实用稳定性的一个简明判据*

胡　刚　　　　　楚天广
(广东工业大学，广州510090)　(清华大学，北京100084)

摘　要　利用比较的方法，获得了线性时滞系统实用稳定性的一个简单判定定理.

关键词　线性时滞系统，实用稳定性，偏差区域.

分类号　AMS(1991) 34D/CCL O175.13

考虑线性时滞系统

$$\dot{x}(t)=a(t)x(t)+b(t)x(t+r(t)),\quad t\geqslant 0,\tag{1}$$

其中 $x(t)\in R^1$，$a(t)$，$b(t)$ 为连续函数，$-r\leqslant r(t)\leqslant 0$，$r$ 为正数. 设 $x(t,t_0,\varphi)$ 为系统(1)满足初始条件

$$x(t_0+\theta)=\varphi(\theta)(-r\leqslant\theta\leqslant 0)$$

的解，其中

$$\varphi\in C([-r,0],R^1),t_0\in T(i),T(i)\subseteq R^+$$

为系统(1)的初始时刻集.

规定，$T_0=[t_0,\tau]$，其中 τ 可为有限数，也可为 $+\infty$，此时，$T_0=[t_0,+\infty)$；$J_\tau=[t_0-r,\tau]$. 记 $S(t_0)$ 为初始偏差区域，$S(t)$ 为随后偏差区域，且满足性质 P：对连续函数 $F:J_\tau\to R^1$，如果有 $t_1\in J_\tau$，使 $F(t_1)\in S(t_1)$，那么，或者对所有 $t\in[t_1,\tau]$，$F(t)\in S(t)$，或者存在 $t_2\in(t_1,\tau]$，使 $F(t_2)\in\partial S(t_2)$，且当 $t\in[t_1,t_2)$ 时，$F(t)\in S(t)$，其中 $\partial S(t_2)$ 表示 $S(t_2)$ 的边界.

定义1　若当 $\varphi(\theta)\in S(t_0)(-r\leqslant\theta\leqslant 0)$ 时，有

$$x(t,t_0,\varphi)\in S(t)(t\in T_0),$$

则称系统(1)关于 $\{S(t_0),S(t),T_0,t_0\}$ 实用稳定.

定义2　若对任意 $t_0\in T(i)$，当 $\varphi(\theta)\in S(t_0)(-r\leqslant\theta\leqslant 0)$ 时，有

$$x(t,t_0,\varphi)\in S(t)(t\in T_0),$$

则称系统(1)关于 $\{S(t_0),S(t),T(i)\}$ 实用一致稳定.

引理　设连续函数 $\psi:J_\tau\to R^+$，m，$n:[t_0,\tau]\to R^1$，且当 $t\in[t_0,\tau]$ 时，满足：

1) $D^+\psi(t)\leqslant m(t)\psi(t)+n(t)\overline{\psi}(t)$，

2) $m(t)+n(t)<0$，

其中 $D^+\psi(t)=\lim\limits_{h\to 0^+}\sup h^{-1}[\psi(t+h)-\psi(t)]$，$\overline{\psi}(t)=\max\limits_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\psi(t+\theta)$. 则当 $t\in[t_0,\tau]$ 时，

* 1992年3月11日收到. 94年5月25日收到修改稿.

$$\psi(t) \leqslant \overline{\psi}(t_0).$$

证明　显然,只需证明对于任意 $\varepsilon > 0, \psi(t) < \overline{\psi}(t_0) + \varepsilon$,其中 $t \in [t_0, \tau]$.

现反设上结论不成立,则必可找到 $t^* \in (t_0, \tau]$ 和某个 $\varepsilon_0 > 0$,使 $\psi(t^*) = \overline{\psi}(t_0) + \varepsilon_0$. 当 $t \in (t_0, t^*)$ 时,有

$$\psi(t) \leqslant \overline{\psi}(t_0) + \varepsilon_0.$$

由于 $\psi(t)$ 的连续性,必存在 $t_1 \in (t_0, t^*)$,使

$$\psi(t_1) = \overline{\psi}(t_0) + \frac{\varepsilon_0}{2},$$

且对 $t \in (t_1, t^*)$,

$$\psi(t) > \overline{\psi}(t_0) + \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

因而 $D^+ \psi(t_1) \geqslant 0$.

同时,$D^+ \psi(t_1) \leqslant m(t_1)\psi(t_1) + n(t_1)\overline{\psi}(t_1) = [m(t_1) + n(t_1)]\left[\overline{\psi}(t_0) + \frac{\varepsilon_0}{2}\right] < 0$,这与上面的结论矛盾. 所以,对于任意 $\varepsilon > 0, \psi(t) < \overline{\psi}(t_0) + \varepsilon (t \in [t_0, \tau])$ 成立.

考虑到 ε 的任意性,引理结论成立.

定理　若存在连续函数 $V(t,x): J_r \times \overline{S}(t) \to R^+$ 及连续函数 $m(t), n(t): T_0 \to R^1$ 满足条件:

1)　$D^+_{(1)} V(t) \leqslant m(t) V(t) + n(t) \overline{V}(t)$,

其中 $(t,x) \in T_0 \times S(t), V(t) = V(t, x(t)), \overline{V}(t) = \max\limits_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} V(t+\theta, x(t))$ 为系统(1)的解;

2)　$m(t) + n(t) < 0$;

3)　$V_M^{t_0} < V_m^{\partial s}(t)$,

其中 $t \in T_0, V_M^{t_0} = \sup\{V(t+\theta), x) \mid -r \leqslant \theta \leqslant 0, x \in S(t_0)\}$,

$$V_m^{\partial s}(t) = \inf\{V(t,x) \mid x \in \partial S(t)\}.$$

则系统(1) 关于 $\{s(t_0) S(t), T_0, t_0\}$ 实用稳定.

证明　假设定理不真,则必存在 $\varphi: \varphi(\theta) \in S(t_0)$,及某时刻 $t_2 > t_0$,使系统(1) 的解 $x^*(t) = x^*(t, t_0, \varphi)$ 满足 $x^*(t_2) \overline{\in} S(t_2)$. 由于 $S(t)$ 具有性质 P,于是存在 $t_1 \in (t_0, t_2)$,使 $x^*(t_1) \in \partial S(t_1)$,且对任意 $t \in [t_0, t_1), x^*(t) \in S(t)$.

另一方面,由于 $V(t)$ 的连续性和条件 1),有

$$D^+_{(1)} V(t) \leqslant m(t) V(t) + n(t) \overline{V}(t), \quad \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

利用引理及条件 2),得 $V(t) \leqslant \overline{V}(t_0), \forall\, t \in [t_0, t_1]$. 而

$$\overline{V}(t_0) = \max_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} V[t_0 + \theta, x^*(t_0 + \theta)] = \max_{-r \leqslant \theta \leqslant 0} V(t_0 + \theta, \varphi(\theta)) \leqslant V_M^{t_0}.$$

故

$$V(t, x^*(t)) \leqslant V_M^{t_0} < V_m^{\partial s}(t), \forall\, t \in [t_0, t_1].$$

特别,当 $t = t_1$ 时,

$$V(t_1, x^*(t_1)) < V_m^{\partial s}(t_1).$$

这与 $x(t_1) \in \partial S(t_1)$ 矛盾. 因而定理结论成立. 证毕.

推论 如果对任意 $t_0 \in T(i)$，定理条件均成立，则系统(1)关于$\{S(t_0), S(t), T(i)\}$实用一致稳定.

例 考虑系统

$$\dot{x}(t) = (-t - \frac{1}{t})x(t) + tx(t - r), \quad t \geqslant t_0 > 0. \tag{2}$$

给定偏差区域

$$S(t_0) = \{x \mid |x| < a\}, S(t) = \{x \mid |x| < \beta\},$$

其中 $\beta > a > 0$ 为常数，$T_0 = [t_0, +\infty)$. 则此系统关于$\{S(t_0), S(t), T_0, t_0\}$实用稳定.

事实上，取 $V(t,x) = V(x) = |x|$，则 $V(t) \geqslant 0$. 显然，$V_M^{S_0} = a, V_m^{\partial S}(t) = \beta, t > t_0$.

$$D^+_{(2)}V(t) = \dot{x}(t)\mathrm{sgn}x(t+0) = (-t - \frac{1}{t})x\,\mathrm{sgn}x(t+0) + tx(t-r)\mathrm{sgn}(t+0)$$

$$\leqslant (-t - \frac{1}{t})|x(t)| + t|x(t-r)| \leqslant (-t - \frac{1}{t})V(t) + t\overline{V}(t).$$

令 $m(t) = -t - \frac{1}{t}, n(t) = t$，则 $m(t) + n(t) = -\frac{1}{t} < 0$. 考虑到 $V_M^{S_0} = a < V_m^{\partial S}(t) = \beta$，则由定理可知，系统(2)关于$\{S(t_0), S(t), T_0, t_0\}$实用稳定.

参 考 文 献

[1] 楚天广、张宗达、孙振绮，科学通报，8(1991)：568—571.

[2] 秦元勋等，带有时滞的动力系统的运动稳定性，科学出版社，1989.

A Concise Criterion of Practical Stability for Linear Delay System

Hu Gang

(Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090)

Chu Tianguang

(Tsinghua University, Beijing 100034)

Abstract

A concise criterion of practical stability for linear delay system is obtained by means of the method of comparison.

Keywords linear delay system, practical stability, deviation region.