第16卷第2期 数学研究与评论 Vol. 16 No. 2
1996年5月 JOURNAL OF MATHEMATICAL RESEARCH AND EXPOSITION May 1996

关于平稳高斯过程的上穿过期望次数的几点注记*

谢 盛 荣
（西南师范大学数学系，重庆630715）

摘 要 设$\{X(t),0\leqslant t\leqslant T<+\infty\}$是平稳高斯过程（可以是均方不可微的，即二阶谱矩可以是无限的），本文着重讨论当$u\to\infty$时，过程上穿过u的期望次数的渐近性质.

关键词 平稳高斯过程，上穿过期望次数.
分类号 AMS(1991) 60G15,60G17/CCL O211.61

关于平稳高斯过程的上穿过问题已有过许多研究，但主要是对二阶谱矩有限时所作的讨论，当二阶谱矩无限时则只是简单地指出过此时上穿过的期望次数为无穷大. 本文研究水平$u\to\infty$时二阶谱矩无限的过程上穿过u的期望次数的渐近情形.

下面§1将给出一个与上穿过有关的概率公式，而后在§2中利用这个公式研究过程上穿过的渐近次数.

§1 与上穿过有关的概率

设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是一个标准平稳高斯过程（即是具有$E(X(t))=0,E(X^2(t))=1$的平稳高斯过程），具有连续函数$r(s)=E(X(t+s)X(t))$，且$X(t)$具有a.s.样本连续性.

周知[1],[2]，若在$[t_1,t_2]$上有$X(t_1)<u<X(t_2)$发生，则在(t_1,t_2)中必有水平u的上穿过发生. 本节研究此事发生的概率. 由于平稳性，只考虑$P(X(0)<u<X(t))$. 记

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt,\quad \varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

定理1 $\{X(t),t\geqslant 0\}$如上所述，则对于$u>0$有

$$P(X(0)<u<X(s))=\Phi(u)(1-\Phi(u))-\frac{\varphi(u)}{u}(1+a(s,u))\left(\Phi(u)-\Phi\left(\sqrt{\frac{1-r(s)}{1+r(s)}}u\right)\right),\tag{1}$$

其中$a(s,u)$介于0与$r(s)$之间，且对于固定的$u>0$有

$$\lim_{s\downarrow 0}(1+a(s,u))=\frac{u\Phi(u)(1-\Phi(u))}{\varphi(u)\left(\Phi(u)-\frac{1}{2}\right)},$$

而对于$u\to+\infty$（当$s\downarrow 0$）满足$\lim\limits_{s\downarrow 0}u^2(1-r(s))=l,0\leqslant l<+\infty$，则有$\lim\limits_{s\downarrow 0}(1+a(s,u))=2$.

* 1993年7月4日收到. 国家自然科学基金资助项目.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

证明 为简化讨论，记 $X(0)=X, X(s)=Y, r(s)=r$，从而要证(1)成立，只需证明对于标准二元正态变量(X,Y)有

$$P(X>u, Y>u; r)=\frac{\varphi(u)}{u}(1+\bar{a}(r,u))(\Phi(u)-\Phi(u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}))+(1-\Phi(u))^2,$$

其中 $\bar{a}(r,u)$介于 0 与 r 之间，$u>0$.

知(X,Y)的密度为

$$\varphi(x,y;\rho)=\frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}}\exp(-\frac{x^2+y^2-2\rho xy}{2(1-\rho^2)}).$$

容易验证

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial\rho},\quad |\rho|\leqslant 1.$$

所以

$$\frac{\partial P(X>u, Y>u, r)}{\partial r}=\int_u^\infty\int_u^\infty\varphi_r'(x,y;r)dxdy=-\int_u^\infty\varphi_r'(u,y;r)dy=\varphi(u,u;r).$$

从而

$$P(X>u, Y>u; r)-P(X>u, y>u; 0)=\int_0^r\varphi(u,u;\rho)d\rho,$$

即

$$P(X>u, Y>u; r)=(1-\Phi(u))^2+\int_0^r\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}d\rho. \tag{2}$$

注意(2)中积分项可以写成

$$\int_0^r\varphi(u)\varphi(u\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho=\frac{\varphi(u)}{u}\int_0^r\varphi(u\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}})\frac{ud\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}. \tag{3}$$

作变量替换 $v=u\sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}}, dv=\frac{-ud\rho}{(1+\rho)\sqrt{1-\rho^2}}$，且 $1+\rho=\frac{2u^2}{v^2+u^2}$，代入(3)中得

$$\frac{\varphi(u)}{u}\int_u^{u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}}(-\varphi(v))\frac{2u^2}{v^2+u^2}dv. \tag{4}$$

由积分中值定理可知存在 ξ 介于 u 与 $u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}$之间使得上式等于

$$\frac{\varphi(u)}{u}\frac{2u^2}{\xi^2+u^2}\int_{u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}}^u\varphi(v)dv=\frac{\varphi(u)}{u}\frac{2u^2}{\xi^2+u^2}(\Phi(u)-\Phi(u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}})). \tag{5}$$

记

$$\bar{a}(r,u)=1-\frac{2\xi^2}{\xi^2+u^2}\ (\xi \text{ 介于 } u \text{ 与 } u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\text{之间}).$$

由于函数$\frac{2x^2}{x^2+u^2}$是 x 的增函数，可见 $\bar{a}(r,u)$介于 0 与 r 之间. 于是(1)得证.

若 u 是固定的，由于已知 $X(t)$是 a.s. 样本连续的，必有

$$\lim_{s\downarrow 0}P(X(0)<u<X(s))=0.$$

从(1)立即得

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$\lim_{s\downarrow 0}(1+a(s,u))=\frac{u\Phi(u)(1-\Phi(u))}{\varphi(u)(\Phi(u)-\frac{1}{2})}.$$

今若 $u\to+\infty$(当 $s\downarrow 0$)满足$\lim\limits_{s\downarrow 0}u^2(1-r(s))=l,0\leqslant l\leqslant+\infty$,对(4)中积分式取极限得

$$\lim_{s\downarrow 0}\int_{u\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}}^{u}\varphi(x)\frac{2u^2}{x^2+u^2}dx=2(1-\Phi(\sqrt{\frac{l}{2}})).$$

从(5)可知,此时应有$\lim\limits_{s\downarrow 0}(1+a(s,u))=2$.得所求证者.

推论 在定理 1 的条件下,有

$$\Phi(u)(1-\Phi(u))-f(u,s)\geqslant P(X(0)<u<X(s))\geqslant\Phi(u)(1-\Phi(u))-(1+r(s))f(u,s),$$

其中 $f(u,s)=\frac{\varphi(u)}{u}(\Phi(u)-\Phi(u\sqrt{\frac{1-r(s)}{1+r(s)}}))$.

证明 当 $r(s)\geqslant$时,$f(u,s)\geqslant 0$,由定理 1 知结论真.当 $r(s)<0$ 时,$f(u,s)<0$,仍易知结论真.

§2 关于上穿过的平均次数

以 $N_u(T)$记区间$(0,T]$内 $X(t)$向上穿过水平 u 的次数,$N_u^{(q)}(T)$记$(0,T]$内使 $X(j-1)q)<u<X(jq)$发生的 jq 的数目,[1]中引理 7.2.2 表明

$$E(N_u(T))=\lim_{q\downarrow 0}E(N_u^{(q)}(T)).$$

而由平稳性易知

$$E(N_u^{(q)}(T))=[\frac{T}{q}]P(X(0)<u<X(q))\sim TJ_q(u)=\frac{T}{q}P(X(0)<u<X(q)).$$

[1]或[2]指出当且仅当$-r''(0)=\lambda_2<+\infty$时有 $E(N_u(T))<+\infty$.且对于固定的 $u>0$,$\lambda_2<+\infty$有 Rice 公式成立.在此,顺便给出 Rice 公式的一个简便证法.

由(2)可知

$$P(X(0)<u<X(q))=\Phi(u)(1-\Phi(u))-\int_0^{r(q)}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{u^2}{1+\rho}}d\rho.$$

如果 $\lambda_2=-r''(0)<+\infty$,可得

$$E(N_u(1))=\lim_{q\downarrow 0}J_q(u)=\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{1+r(q)}}\frac{1}{\sqrt{1+r(q)}}\sqrt{\frac{q^2}{1-r(q)}\frac{-r'(q)}{q}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{u^2}{2}}\sqrt{\lambda_2}.$$

Rice 公式得证.当 $\lambda_2=+\infty$,已表明 $E(N_u(1))=+\infty$.

对于 $u\to\infty$时 $X(t)$对高水平的上穿过问题,[1]中引理 7.3.1 只讨论了在 $\lambda_2<+\infty$时且 $qu\to 0$ 时有 $E(N_u^{(q)}(1))\sim J_q(u)\sim\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{2x}\sqrt{\lambda_2}$,其中 u 可以是固定的,也可以趋于无穷大,[3]中引理 3.2.1 讨论了在 $\lambda_2<+\infty$,且 $qu\to a>0$ 时有

$$E(N_u^{(q)}(1))\sim J_q(u)\sim\frac{1}{a}\varphi(u)(2\Phi(\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}a)-1).$$

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

下面讨论 λ_2 不一定有限而 $qu^{\beta}\to a(a\geqslant 0,\beta>0)$ 时 $X(t)$ 的上穿过情形(其中水平 u 固定或 $u\to+\infty$).

定理 2 设 $\{X(t),t\geqslant 0\}$ 如 §1 所述,若有 $\lim\limits_{q\downarrow 0}u^2(1-r(q))=l$, $0\leqslant l\leqslant+\infty$,则

(1°) $\lim\limits_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=2\Phi(\sqrt{\frac{l}{2}})-1$;

(2°) 若还有 $qu^{\beta}\to a$,此时 $\beta>0$ 而 $0<a\leqslant+\infty$ 与 l 有关,则

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{E(N_u^{(q)}(T))}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=\frac{T}{a}(2\Phi(\sqrt{\frac{l}{2}})-1);\tag{6}$$

(3°) 若对于 $qu^{\beta}\to a$,此 $\beta>0$ 而 $0\leqslant a<+\infty$,且可表 $\sqrt{l}=\sqrt{2}f(a)$,函数 $f(a)$ 满足 $f(0)=0$ 及 $f'(0^+)$ 存在,为有限数,那么当 $qu^{\beta}\to 0(q\downarrow 0)$ 时有

$$\lim_{a\to 0+}\lim_{q\downarrow 0}\frac{E(N_u^{(q)}(T))}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=\sqrt{\frac{2}{x}}Tf'(0^+).\tag{7}$$

证明 由定理 1 可知

$$P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=\Phi(u)-\frac{\varphi(u)}{u(1-\Phi(u))}(1+a(s,u))(\Phi(u)-\Phi(u\sqrt{\frac{1-r(s)}{1+r(s)}})).\tag{8}$$

当 u 固定可知 $l=0$,对上式取极限利用定理 1 中关于 $1+a(s,u)$ 的极限结果,立即可得

$$\lim_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,x(q)>u)=0,$$

(1°)成立. 今若 $u\to+\infty$,利用定理 1 中关于 $1+a(s,u)$ 的极限结果,可得当 $0\leqslant l<+\infty$ 时

$$\lim_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=2\Phi(\sqrt{\frac{l}{2}})-1.$$

最后若 $l=+\infty$,于是必有 $u\to+\infty$. 对(8)令 $q\downarrow 0$ 得

$$\lim_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=1,$$

也有(1°)成立.

进一步,若(2°)中假定成立,注意有 $u\to+\infty$,且

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{J_q(u)}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{qu^{\beta}}\frac{u}{\varphi(u)}P(X(0)<u<X(q))=\lim_{q\downarrow 0}\frac{1}{qu^{\beta}}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)$$

$$=\frac{1}{a}(2\Phi(\sqrt{\frac{l}{2}})-1),$$

即(2°)成立.

现在若 l 与 a 有关系式 $\sqrt{l}=\sqrt{2}f(a)$, $a\in[0,\varepsilon)$,那么对 $a\in(0,\varepsilon)$,根据(2°)有(6)成立,即

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{J_q(u)}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=\frac{1}{a}(2\Phi(f(a))-1).$$

当(3°)中假定成立,$qu^{\beta}\to 0(q\downarrow 0)$ 时有

$$\lim_{a\to 0^+}\lim_{q\downarrow 0}\frac{J_q(u)}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=2\varphi(f(0))f'(0^+)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0^+).$$

定理 2 得证.

由定理 2 可直接给出具体的讨论,即讨论 $X(t)$ 的协方差函数为下式的情况:

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.

$$r(q) = 1 - c|q|^{\alpha} + o(|q|^{\alpha}), \tag{9}$$

其中 $0<\alpha\leqslant 2, c>0$ 是常数. 当 $\alpha=2$ 时是均方可微的过程,此时二阶谱矩 $\lambda_2=2c$.

定理 3 设$\{X(t),t\geqslant 0\}$是标准的平稳高斯过程,具有相关函数如(9)所示,$qu^{\beta}\to a, 0<a<+\infty, \beta>0$,则

(1°) 当 $0<\beta<\frac{2}{\alpha}$ 时有 $\lim\limits_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=1$ 以及 $\lim\limits_{q\downarrow 0}\frac{E(N_u^{(q)}(1))}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=\frac{1}{a}$;

(2°) 当 $\beta>\frac{2}{\alpha}(\geqslant 1)$ 时有 $\lim\limits_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=0$ 以及 $\lim\limits_{q\downarrow 0}\frac{E(N_u^{(q)}(1))}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=0$;

(3°) 当 $\beta=\frac{2}{\alpha}(\geqslant 1)$ 时有 $\lim\limits_{q\downarrow 0}P(X(0)<u\,|\,X(q)>u)=2\Phi(\sqrt{\frac{c}{2}}a^{\alpha/2})-1$ 以及

$$\lim_{q\downarrow 0}\frac{E(N_u^{(q)}(1))}{\varphi(u)u^{\beta-1}}=\frac{1}{a}(2\Phi(\sqrt{\frac{c}{2}}a^{\alpha/2})-1).$$

特别当 $\beta=1, \alpha=2$, 写 $c=\frac{\lambda_2}{2}$ 时有

$$E(N_u^{(q)}(1))\sim J_q(u)\sim\frac{1}{a}\varphi(u)(2\Phi(\frac{\sqrt{\lambda_2}}{2}a)-1).$$

参 考 文 献

[1] M. R. Leadbetter, G. Lindgren and H. Rootzen, *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*, New York, Springer-Verlag, 1983.

[2] H. Cramer and M. R. Leadbetter, *Stationary and Related Stachastic Processes*, Wiley, New York, 1967.

[3] M. R. Leadbetter, *Extreme value theory under weak mixing conditions*, Studies in Probability Theory, MAA. Stud. Math., 18(1978), 46—110.

Notes on Mean Number of Upcrossings for Stationary Gaussian Process

Xie Shengrong

(Dept. of Math., Southwest China Normal University, Chongqing 630715)

Abstract

Let $\{X(t), 0<t\leqslant T<+\infty\}$ be a stationary Gaussian process (may be nondifferentiable in quadratic mean). We discuss the asymptotical properties of mean number of upcrossings for level $u>0$ (or $u\to\infty$) by $\{X(t), 0\leqslant t\leqslant T\}$.

Keywords stationary Gaussian process, mean number of upcrossings.

© 1995-2005 Tsinghua Tongfang Optical Disc Co., Ltd. All rights reserved.